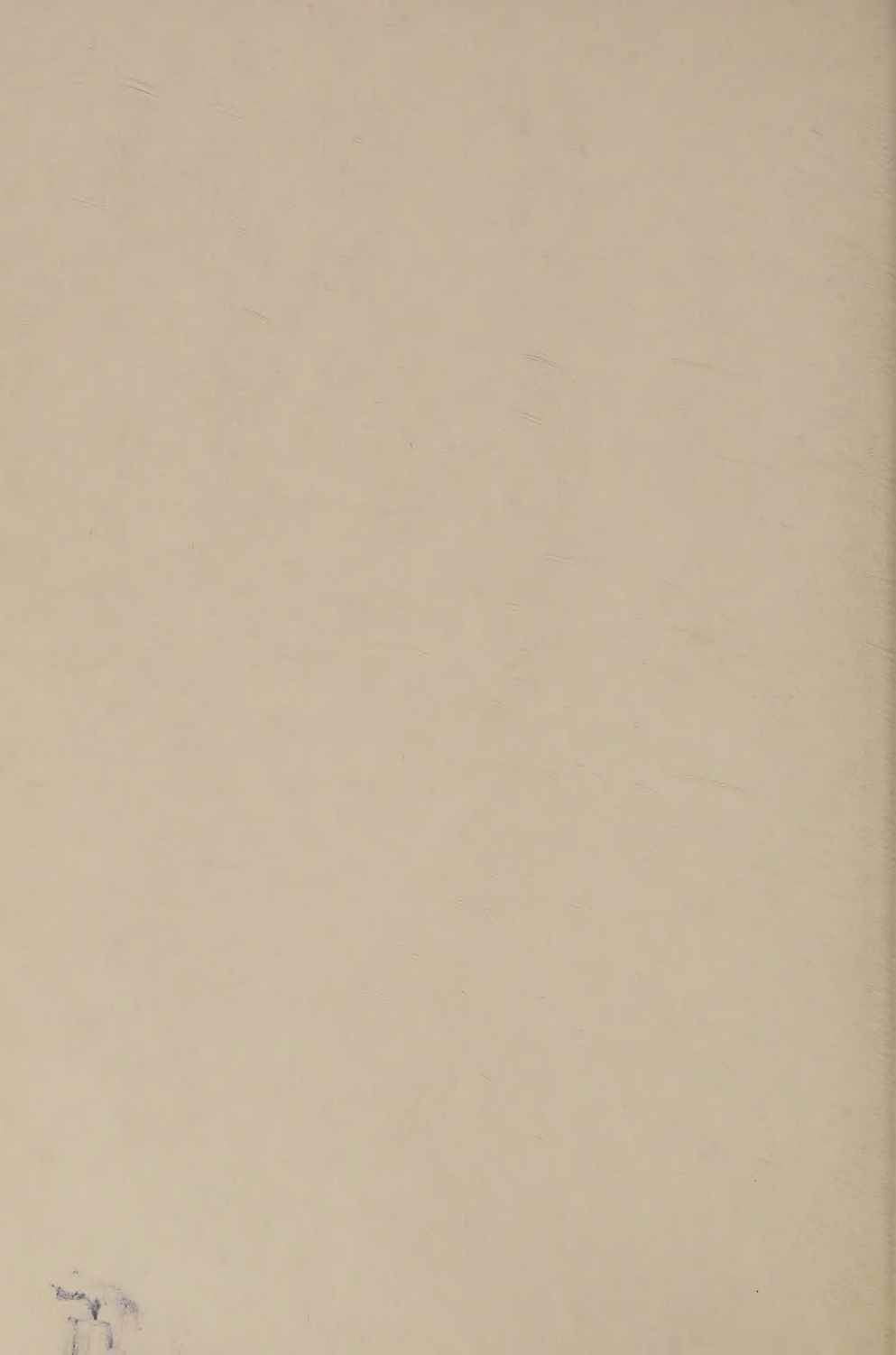


**ÜBER DAS HOCHHEBEN
VON STETIGEN MARKOFFPROZESSEN
AUF ÜBERLAGERUNGSFLÄCHEN**

von
Norbert Held

aus
Burgellern

1973



**ÜBER DAS HOCHHEBEN
VON STETIGEN MARKOFFPROZESSEN
AUF ÜBERLAGERUNGSFLÄCHEN**

**Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Norbert Held

aus

Burgellern

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg

ÜBER DAS HOCHMESS
VON STEIGEN MARKOPPROZEN
AUF ÜBERLAGERUNGSRÄUMEN

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zu

Erlangung des Doktorgrades



vorgelagt

von

Nöcker Hald

am

Tag der mündlichen Prüfung 28.11.1973

Dekan: Prof. Dr. Jens Christiansen

Erstberichterstatter: Prof. Dr. Heinz Bauer

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Dietrich Kölzow

EINLEITUNG

Seien U und $\hat{U}$ zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $p: \hat{U} \rightarrow U$ eine Überlagerung und $X = ((X_t), (P_x))$ ein stetiger Markoffprozeß auf U . Nach einer Arbeit von S. Itô (vgl. [8]) gibt es auf $\hat{U}$ einen stetigen Markoffprozeß $\hat{X} = ((\hat{X}_t), (\hat{P}_x))$ derart, daß für jedes $x \in \hat{U}$ die stochastischen Prozesse $((p \circ \hat{X}_t), \hat{P}_x)$ und $((X_t), P_{p(x)})$ gleiche endlich-dimensionale Verteilungen besitzen, wenn U eine bestimmte topologische Gruppe $(+)$ und X translationsinvariant auf U ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Konstruktion solch eines Prozesses $\hat{X}$ für den Fall durchzuführen, daß U Element einer bestimmten Klasse $M(++)$ von offenen und zusammenhängenden Teilmengen einer solchen topologischen Gruppe und X die Restriktion auf U eines translationsinvarianten Prozesses ist.

Da der Prozeß $\hat{X}$ wie bei Itô durch Hochheben der einzelnen Pfade von X erhalten werden soll, erweist es sich als zweckmäßig, den Prozeß X zunächst durch eine Schar von stochastischen Prozessen $(Y_t^U(s, x))_{t \geq s} ((s, x) \in R_+ \times U)(+++)$ zu beschreiben. $Y_t^U(s, x)$ kann man dabei auffassen als den Ort des Prozesses X zur Zeit t unter der Bedingung, daß er

(+) Es wird verlangt, daß U lokalkompakt und abelsch ist, eine abzählbare Basis besitzt und wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfachzusammenhängend ist.

(++) Eine Menge U gehört genau dann zu M , wenn sie die weiter unten (S. 4) folgende Bedingung (F) erfüllt. Zum Beispiel gehört jede Menge U , für die der zugehörige Prozeß X nicht abbricht, zu M . (Vgl. Kapitel 2, Satz 2, S. 39.) Es gibt aber auch Mengen U , die zu M gehören und für die der Prozeß X abbricht. (Vgl. Kapitel 2, Satz 3, S. 40.)

(+++) Da der Prozeß X von U abhängt, hängt auch der Prozeß $(Y_t(s, x))_{t \geq s}$ von U ab.

zur Zeit s in x war. Durch Hochheben der einzelnen (stetigen) Pfade des stochastischen Prozesses $(Y_t^U(s, p(x)))_{t \geq s}$ entsteht dann auf $\hat{U}$ zu vorgegebenem $(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{U}$ ein stochastischer Prozeß $(\hat{Y}_t(s, x))_{t \geq s}$ mit stetigen Pfaden. Man hat dabei nur zu beachten, daß das Hochheben der einzelnen Pfade von U auf $\hat{U}$ meßbar vor sich geht. (Vgl. S. 12, wo bemerkt wird, daß P_0 Borel-meßbar ist.) Das Problem besteht nun darin, die einzelnen stochastischen Prozesse der Schar $(\hat{Y}_t(0, x))_{t \geq 0}$ ($x \in \hat{U}$) so miteinander zu verknüpfen, daß der gewünschte Markoffprozeß $\hat{X}$ entsteht. Dazu greift man wie bei Itô auf solche Eigenschaften der stochastischen Prozesse $(Y_t^U(s, x))_{t \geq s}$ ($(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$) zurück, die sich in einfacher Weise auf die stochastischen Prozesse $(\hat{Y}_t(s, x))_{t \geq s}$ ($(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{U}$) übertragen lassen. Waren es zum Beispiel bei Itô die unabhängigen Zuwächse, so ist es hier die verallgemeinerte Halbgruppeneigenschaft (es ist $s \leq t \leq u$)

$$Y_u^U(t, Y_t^U(s, x)) = Y_u^U(s, x)$$

die beim Hochheben der Pfade erhalten bleibt. Beim Übertragen der Eigenschaft (η und η_n sind U -wertige Zufallsvariable)

$$(\text{F}) \quad \eta_n \rightarrow \eta \implies Y_u^U(s, \eta_n) \rightarrow Y_u^U(s, \eta) \text{ glm. in } u \in [s, t]$$

der Prozesse $(Y_t^U(s, x))_{t \geq s}$ ($(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$) auf die Prozesse $(\hat{Y}_t(s, x))_{t \geq s}$ ($(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{U}$) macht man von dem Umstand Gebrauch, daß das Hochheben der Pfade nicht nur meßbar, sondern sogar stetig vor sich geht. Hat man nun für die Prozesse $(\hat{Y}_t(s, x))_{t \geq s}$ ($(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{U}$) alle diese Eigenschaften (und noch einige mehr) nachgewiesen (vgl. Kapitel 2, Lemma 4, S. 28), so kann man unter Benutzung der Markoffeigenschaft von X zeigen, daß es auf $\hat{U}$ eine Übergangsfunktion $\hat{F}$ gibt derart, daß für jedes $x \in \hat{U}$ der Prozeß $(\hat{Y}_t(0, x))_{t \geq 0}$ ein Markoffscher Prozeß mit Übergangsfunktion $\hat{F}$ ist. Damit ist die angestrebte Verknüpfung der Prozesse $(\hat{Y}_t(0, x))_{t \geq 0}$ ($x \in \hat{U}$) erreicht worden, denn nunmehr ist es ein leichtes aus der Schar $(\hat{Y}_t(0, x))_{t \geq 0}$ ($x \in \hat{U}$) den gewünschten Prozeß $\hat{X}$ zu gewinnen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit beweisen wir, daß das

Hochheben der Pfade stetig vor sich geht (vgl. Kapitel 1, Satz 2, S.11), während im zweiten Kapitel die Konstruktion des Prozesses $\hat{X}$ nach den oben ausgeführten Überlegungen durchgeführt wird.

Den Herren Dr. L. Kaup, Dr. H. Föllmer, Dr. J. Bliedtner vom Mathematischen Institut in Erlangen und Herrn Professor J. C. Taylor aus Montreal möchte ich an dieser Stelle für anregende Gespräche und wertvolle Hinweisedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor H. Bauer für die Überlassung des Themas und die Unterstützung bei der Arbeit.

TERMINOLOGIE

1 - Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen, mit $\mathbb{R}_+$ die nicht negativen Elemente von $\mathbb{R}$. Für zwei topologische Räume X, Y ist $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X in Y .

2 - ÜBERLAGERUNG - Seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir sagen der Raum X ist dem Raum Y vermöge f überlagert oder $f: X \rightarrow Y$ ist eine Überlagerung, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung U von y in Y und eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von paarweise disjunkten offenen Teilmengen von X gibt derart, daß $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ und für jedes $i \in I$ die Menge U_i durch f homöomorph auf U abgebildet wird.

3 - Ein Maßraum ist ein Paar $(E, \underline{E})$, wo E eine Menge und $\underline{E}$ eine σ -Algebra auf E ist. Ein Maßraum heißt ein Zustandsraum, wenn $\{x\} \in \underline{E}$ für alle $x \in E$ gilt. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(W, \underline{M}, P)$, wo W eine Menge, $\underline{M}$ eine σ -Algebra auf W und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\underline{M}$ ist. Für eine P -integrierbare Funktion $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne $E(f)$ den Erwartungswert von f und für eine σ -Algebra $\underline{A} \subset \underline{M}$ ist $E(f | \underline{A})$ die bedingte Erwartung von f unter der Hypothese $\underline{A}$.

4 - STOCHASTISCHER PROZESS - Sei $(E, \underline{E})$ ein Zustandsraum und I eine Menge. Ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(E, \underline{E})$ und Zeitmenge I ist ein Quadrupel $(W, \underline{M}, P, (X_t)_{t \in I})$, wo $(W, \underline{M}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X_t für jedes $t \in I$ eine $\underline{M}$ - $\underline{E}$ -meßbare Abbildung von W in E ist. (+) Für jedes $w \in W$ heißt die Abbildung $t \rightarrow X_t(w)$

(+) Im Gegensatz hierzu ist eine Zufallsfunktion mit Zu-

von I in E ein Pfad des stochastischen Prozesses. Zwei stochastische Prozesse mit dem gleichen Zustandsraum und der gleichen Zeitmenge heißen äquivalent, wenn sie die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen.

5 - ÜBERGANGSFUNKTION - Ist $(E, \underline{E})$ ein Zustandsraum, so heißt eine Abbildung $F: \mathbb{R}_+ \times E \times \underline{E} \rightarrow [0, 1]$ eine Übergangsfunktion auf $(E, \underline{E})$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(5.1) Für jedes $(t, A) \in \mathbb{R}_+ \times \underline{E}$ ist $x \rightarrow F(t, x, A)$ $\underline{E}$ -meßbar.

(5.2) Für jedes $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$ ist $A \rightarrow F(t, x, A)$ ein Maß auf $\underline{E}$.

(5.3) Für jedes $t, h \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$ und $A \in \underline{E}$ gilt die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung

$$F(t+h, x, A) = \int F(t, x, dy) F(h, y, A).$$

6 - MARKOFFSCHER PROZESS MIT ÜBERGANGSFUNKTION - Sei $(W, \underline{M}, P, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ ein stochastischer Prozeß auf einem Zustandsraum $(E, \underline{E})$ mit Zeitmenge $\mathbb{R}_+$, $(\underline{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine aufsteigende Familie von σ -Unteralgebren von $\underline{M}$ und F eine Übergangsfunktion auf $(E, \underline{E})$. Wir sagen $(W, \underline{M}, P, (\underline{M}_t), (X_t))$ ist ein Markoffscher Prozeß mit Übergangsfunktion F , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(6.1) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist X_t $\underline{M}_t - \underline{E}$ -meßbar.

(6.2) Für jedes $t, h \in \mathbb{R}_+$ und jede beschränkte $\underline{E}$ -meßbare Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$E(f \circ X_{t+h} | \underline{M}_t) = F(h, X_t, f) \quad P\text{-f.ü..}^{(+)}$$

standsraum $(E, \underline{E})$ und Zeitmenge I ein Tripel $(W, \underline{M}, (X_t)_{t \in I})$ wo $(W, \underline{M})$ ein Maßraum und (X_t) eine Familie von $\underline{M} - \underline{E}$ -meßbaren Abbildungen von W in E ist. Bei einer Zufallsfunktion braucht also kein Wahrscheinlichkeitsmaß vorgegeben zu sein.

(+) $F(h, x, f) = \int F(h, x, dy) f(y)$.

7 - MARKOFFPROZESS - Wir wollen nun jene Art von Markoffprozessen definieren, mit der wir uns in dieser Arbeit beschäftigen. Sei $(E, \underline{E})$ ein Zustandsraum und Δ ein Punkt, der nicht zu E gehört. Wir setzen $E' = E \cup \{\Delta\}$ und bezeichnen mit $\underline{E}'$ die von $\underline{E}$ in E' erzeugte σ -Algebra. Sei ferner $(W, \underline{M})$ ein Maßraum und $(\underline{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine aufsteigende Familie von σ -Unteralgebren von $\underline{M}$. In W sei ein Punkt w_Δ ausgezeichnet und zu jedem $t \in \mathbb{R}_+$ sei eine Abbildung $X_t: W \rightarrow E'$ und eine Abbildung $\theta_t: W \rightarrow W$ gegeben derart, daß $X_0(w_\Delta) = \Delta$ und aus $X_t(w) = \Delta$ stets $X_s(w) = \Delta$ für alle $s \geq t$ folgt. Schließlich sei $(P_x)_{x \in E}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\underline{M}$. Wir sagen der Term $X = (W, \underline{M}, (\underline{M}_t), (X_t), (\theta_t), (P_x))$ definiert einen Markoffprozeß (mit Translationsoperatoren) auf $(E, \underline{E})$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (+)

(7.1) Für jedes $(t, A) \in \mathbb{R}_+ \times \underline{E}'$ ist X_t $\underline{M}_t$ - $\underline{E}'$ -meßbar und $x \rightarrow P_x\{X_t \in A\}$ $\underline{E}' - \underline{A}([0, 1])$ -meßbar und für jedes $x \in E'$ ist $P_x\{X_0 = x\} = 1$.

(7.2) Für jedes $t, h \in \mathbb{R}_+$ ist $X_t \circ \theta_h = X_{t+h}$.

(7.3) Für jedes $x \in E'$, $t, h \in \mathbb{R}_+$ und jede beschränkte $\underline{E}'$ -meßbare Funktion $f: E' \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$E_x(f \circ X_{t+h} | \underline{M}_t) = E_{X_t}(f \circ X_h) \quad P_x\text{-f.ü.}$$

Man sieht, daß durch $F(t, x, A) = P_x\{X_t \in A\}$ eine Übergangsfunktion F auf $(E', \underline{E}')$ definiert wird und daß für jedes $x \in E'$ $(W, \underline{M}, P_x, (\underline{M}_t), (X_t))$ ein Markoffscher Prozeß mit Übergangsfunktion F im Sinne von Absatz 6 ist. Die durch $\zeta(w) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t(w) = \Delta\}$ (++) definierte Abbildung $\zeta: W \rightarrow [0, \infty]$ heißt die Lebenszeit des Prozesses X . X heißt nicht-abbrechend, wenn $P_x\{\zeta = +\infty\} = 1$ für alle $x \in E$, andernfalls abbrechend. Ist E ein topologischer Raum, so heißt X stetig, wenn es eine Menge $\bar{W} \subset \underline{M}$ gibt derart, daß für alle $x \in E$ $P_x(\bar{W}) = 1$ und für alle $w \in \bar{W}$ die Abbildung $t \rightarrow X_t(w)$ von $[0, \zeta(w)]$ in E stetig ist.

(+) Vgl. [2], Kapitel 1, Definition 3.1, S. 20.

(++) $\zeta(w) = +\infty$, falls $\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t(w) = \Delta\} = \emptyset$.

8 - STOPZEIT - Sei $(W, \underline{M})$ ein Maßraum, I eine geordnete Menge und $(\underline{M}_t)_{t \in I}$ eine aufsteigende Familie von σ -Unter-algebren von $\underline{M}$. Eine Abbildung $T: W \rightarrow I$ heißt eine $(\underline{M}_t)$ -Stopzeit, wenn $\{T \leq t\} \in \underline{M}_t$ für alle $t \in I$ gilt. Für eine solche Stopzeit T ist definiert $\underline{M}_T := \{A \subset W: A \cap \{T \leq t\} \in \underline{M}_t \text{ für alle } t \in I\}$. $\underline{M}_T$ ist eine σ -Algebra.

9 - STARKER MARKOFFPROZESS - Sei $X = (W, \underline{M}, (\underline{M}_t), (X_t), (\theta_t), (P_x))$ ein Markoffprozeß auf $(E, \underline{E})$. Setze $\underline{M}_\infty = \underline{M}$ und für alle $w \in W$ $X_\infty(w) = \Delta$ und $\theta_\infty(w) = w_\Delta$. X heißt starker Markoffprozeß, wenn für jede $(\underline{M}_t)_{t \in [0, +\infty]}$ -Stopzeit T gilt:

(9.1) X_T ist $\underline{M}_T - (\underline{E}')^*$ -meßbar. (+)

(9.2) Für jedes $x \in E'$, $t \in \mathbb{R}_+$ und jede beschränkte $\underline{E}'$ -meßbare Funktion $f: E' \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$E_x(f \circ X_{T+t} | \underline{M}_T) = E_{X_T}(f \circ X_t) \quad P_x\text{-f.ü.}$$

10 - RESTRIKTION EINES MARKOFFPROZESSES - Sei $X = (W, \underline{M}, (\underline{M}_t), (X_t), (\theta_t), (P_x))$ ein stetiger starker Markoffprozeß auf einem lokalkompakten Raum $(E, \underline{E})$ (++) mit abzählbarer Basis und $\hat{E}$ eine offene Teilmenge von E . Definiere $T: W \rightarrow [0, +\infty]$ durch $T(w) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+: X_t(w) \in E' \setminus \hat{E}\}$. Ist $\hat{\Delta}$ der Alexandroffpunkt von $\hat{E}$ und $\hat{E}' = \hat{E} \cup \{\hat{\Delta}\}$ so definiere für $t \in \mathbb{R}_+$ $\hat{X}_t: W \rightarrow \hat{E}'$ durch $\hat{X}_t(w) = X_t(w)$, falls $t < T(w)$ und $= \hat{\Delta}$, falls $t \geq T(w)$ und $\hat{\theta}_t: W \rightarrow W$ durch $\hat{\theta}_t(w) = \theta_t(w)$, falls $t < T(w)$ und $= w_\Delta$, falls $t \geq T(w)$. Setze $\hat{P}_x = P_x$, falls $x \in \hat{E}$ und $= P_{\hat{\Delta}}$, falls $x = \hat{\Delta}$. Der Term $\hat{X} = (W, w_\Delta, \underline{M}, (\underline{M}_t), (\hat{X}_t), (\hat{\theta}_t), (\hat{P}_x))$ definiert dann einen stetigen starken Markoffprozeß auf dem lokalkompakten Raum $(\hat{E}, \hat{\underline{E}})$ mit abzählbarer Basis. (+++) $\hat{X}$ heißt die Restriktion von X auf $\hat{E}$.

(+) $(\underline{E}')^*$ bezeichne die σ -Algebra der universell meßbaren Teilmengen von E' . Man beachte ferner, daß hier $\underline{M}_T \subset \underline{M}$.

(++) $\underline{E}$ sei die Borelsche σ -Algebra auf E und Δ der Alexandroffpunkt von E .

(+++) Vgl. [6], Vol. 1, Abschnitt 10.3, S. 302.

K A P I T E L 1

1

Für das Folgende seien $X, \hat{X}$ zwei wegzusammenhängende topologische Räume und $p: \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. (+) Wir betrachten ferner ein linksseitig abgeschlossenes Intervall I in $\mathbb{R}$, dessen linken Endpunkt wir mit a bezeichnen.

SATZ 1.— Zu jedem Paar $(\hat{x}, v) \in \hat{X} \times C(I, X)$ mit $p(\hat{x}) = v(a)$ gibt es genau eine Abbildung $\hat{v} \in C(I, \hat{X})$ mit $\hat{v}(a) = \hat{x}$ und $p \circ \hat{v} = v$.

BEWEIS: Für den Fall, daß I kompakt ist, ist der Satz bekannt. (Vgl. [7], 6.5.9, S. 250) Hieraus folgt für den Fall, daß I nicht kompakt ist, zunächst die Existenz wie folgt. Es gibt eine Folge (I_n) von kompakten Intervallen mit linkem Endpunkt a und mit $I_n \uparrow I$. Setze für $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \text{Rest}_{I_n} v$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann (genau) ein $\hat{v}_n \in C(I_n, \hat{X})$ mit $\hat{v}_n(a) = \hat{x}$ und $p \circ \hat{v}_n = v_n$. Wegen $\text{Rest}_{I_n} \hat{v}_{n+1} = \hat{v}_n$ für allen n wird dann durch $\hat{v}(t) = \hat{v}_n(t)$, falls $t \in I_n$, eine stetige Abbildung $\hat{v}: I \rightarrow \hat{X}$ definiert, die das Verlangte leistet. Die Eindeutigkeit ergibt sich schließlich folgendermaßen. Seien $\hat{v}$,
 (+) Vgl. Terminologie, Absatz 2, S. 6.

$\hat{w} \in C(I, \hat{X})$ mit $\hat{v}(a) = \hat{x} = \hat{w}(a)$ und $p \circ \hat{v} = v = p \circ \hat{w}$. Hieraus folgt, daß $\hat{v} = \hat{w}$ auf jedem kompakten Teilintervall von I mit linkem Endpunkt a , und somit $\hat{v} = \hat{w}$ auf ganz I .

Seien nun X und $\hat{X}$ lokalkompakt mit abzählbarer Basis und X zusätzlich lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. d bzw. $\hat{d}$ sei eine die Topologie von X bzw. $\hat{X}$ definierende Metrik. Ferner sei das Intervall I kompakt.

SATZ 2. — Die durch p nach Satz 1 induzierte Abbildung $P: (\hat{x}, v) \longrightarrow \hat{v}$ der Menge aller Paare $(\hat{x}, v) \in \hat{X} \times C(I, X)$ mit $p(\hat{x}) = v(a)$ in die Menge $C(I, \hat{X})$ ist stetig, wenn auf $C(I, X)$ und $C(I, \hat{X})$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz betrachtet wird.

Zum Beweis von Satz 2 brauchen wir einige Lemmata. Wir betrachten zunächst folgende spezielle Situation. Sei $(\hat{x}_0, x_0) \in \hat{X} \times X$ ein Paar mit $p(\hat{x}_0) = x_0$ und $\hat{C}$ bzw. C die Menge aller stetigen Abbildungen $\hat{v}$ bzw. v von I in $\hat{X}$ bzw. X mit $\hat{v}(a) = \hat{x}_0$ bzw. $v(a) = x_0$.

LEMMA 1. — Durch $Q_0: \hat{v} \longrightarrow p \circ \hat{v}$ wird eine stetige Bijektion von $\hat{C}$ auf C definiert, wenn auf $\hat{C}$ und C die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz betrachtet wird.

Wir verwenden zum Beweis von Lemma 1 das bekannte Lemma über die Lebesgue'sche Zahl. (Vgl. [7], 1.8.2, S. 38)

LEMMA. — Sei (E, d) ein metrischer Raum und K eine kom-

pakte Teilmenge von E . Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in A}$ von K gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $i \in A$ mit $K_\delta(x) \subset U_i$. (+)

BEWEIS VON LEMMA 1: Daß Q_0 eine Bijektion ist, folgt sofort aus Satz 1. Sei nun $\hat{v} \in \hat{C}$ ein beliebiger Pfad und $\epsilon > 0$. Für jedes $t \in I$ ist die Abbildung $p: \hat{X} \rightarrow X$ in $\hat{v}(t)$ stetig. Zu jedem $t \in I$ gibt es somit ein $\delta(t) > 0$ derart, daß $p(K_{\delta(t)}^{\hat{d}}(\hat{v}(t))) \subset K_{\epsilon/2}^d(p(\hat{v}(t)))$. $(K_{\delta(t)}^{\hat{d}}(\hat{v}(t)))_{t \in I}$ bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K = \{\hat{v}(t) : t \in I\}$. Nach obigem Lemma über die Lebesgue'sche Zahl gibt es also ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $t \in I$ gibt es ein $s \in I$ derart, daß $K_\delta^{\hat{d}}(\hat{v}(t)) \subset K_\delta^{\hat{d}}(s)(\hat{v}(s))$. Sei nun $\hat{w} \in \hat{C}$ ein beliebiger Pfad mit $\hat{d}(\hat{w}(t), \hat{v}(t)) < \delta$ für alle $t \in I$. Dann gilt für die Pfade $w = Q_0(\hat{w})$ und $v = Q_0(\hat{v})$: $d(w(t), v(t)) < \epsilon$ für alle $t \in I$. Denn sei $t \in I$ beliebig. Zu t gehört ein s mit $K_\delta^{\hat{d}}(\hat{v}(t)) \subset K_\delta^{\hat{d}}(s)(\hat{v}(s))$. Da $\hat{w}(t) \in K_\delta^{\hat{d}}(\hat{v}(t))$ folgt $d(w(t), v(s)) < \epsilon/2$. Da $\hat{v}(t) \in K_\delta^{\hat{d}}(\hat{v}(t))$, folgt $d(v(t), v(s)) < \epsilon/2$. Also $d(w(t), v(t)) < \epsilon$. Damit ist gezeigt, daß Q_0 in $\hat{v}$ stetig ist.

Da $\hat{C}$ und C polnische Räume sind, folgt aus Lemma 1 mit Hilfe eines Satzes von Kuratowski (vgl. [4], Korollar S. 135), daß die Inverse P_0 der Abbildung Q_0 Borel-meßbar ist. Es wird sich zeigen, daß P_0 sogar stetig ist. Dazu zeigen wir zunächst die Stetigkeit von P_0 in speziellen Punkten.

(+) $K_\delta(x) = K_\delta^d(x) = \{y \in E : d(y, x) < \delta\}$

LEMMA 2. — Sei $v \in C$ ein Pfad, zudem es eine offene einfach zusammenhängende Teilmenge U von X gibt mit $v(t) \in U$ für alle $t \in I$. Dann ist P_0 in v stetig.

Wir beweisen Lemma 2 zunächst für die universelle Überlagerung von X und wollen deshalb kurz auf deren Konstruktion eingehen. (Vgl. [7], 6.6, S. 253–257.)

Unter einem Weg in X verstehen wir ein Paar (r, f) , wo $r \in \mathbb{R}_+$ und $f: [0, r] \rightarrow X$ stetig ist. Für jeden Weg (r, f) ist der Weg $(1, f_{(1)})$ definiert durch $f_{(1)}(t) = f(rt)$. Das Produkt $(r+s, f * g)$ zweier Wege (r, f) und (s, g) mit $f(r) = g(0)$ ist definiert $(f * g)(t) = f(t)$, falls $t \in [0, r]$ und $= g(t-r)$, falls $t \in [r, r+s]$. Bezeichne nun die Menge aller in x_0 beginnenden Wege in X . $f, g \in E(+)$ heißen äquivalent, wenn $\text{Endpunkt}(f) = \text{Endpunkt}(g)$ und wenn f homotop zu g , d.h. genauer, wenn $f_{(1)}$ homotop zu $g_{(1)}$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf E bestimmt. (f) bezeichne diejenige Äquivalenzklasse, in der f liegt und $\hat{X} = \{(f) : f \in E\}$ sei die Menge aller Äquivalenzklassen. Definiere $\hat{p}: \hat{X} \rightarrow X$ wie folgt: Sei $\hat{x} \in \hat{X}$. Wähle $f \in \hat{x}$ und setze $\hat{p}(\hat{x}) = \text{Endpunkt}(f)$. Dadurch ist $\hat{p}$ eindeutig definiert! Sei $\hat{x} \in \hat{X}$ und U eine offene Umgebung von $\hat{p}(\hat{x})$. Sei $f \in \hat{x}$ und definiere $(U, \hat{x}) := \{(f * g) : g \text{ Weg in } U \text{ mit Anfangspunkt}(g) = \text{Endpunkt}(f)\}$. Dadurch ist $(U, \hat{x})$ eindeutig definiert! Man kann nun zeigen, daß das Mengensystem $\{(U, \hat{x}) : U \text{ offene Umgebung von } \hat{p}(\hat{x})\}$ ein fundamentales Umgebungssystem (von $\hat{x}$) einer Topologie auf

(+) Wir schreiben für (r, f) der Kürze halber nur noch f .

$\hat{X}$ ist und daß $\hat{p}: \hat{X} \rightarrow X$ mit dieser Topologie eine einfach-zusammenhängende Überlagerung von X ist. $\hat{X}$ heißt universelle Überlagerung von X .

BEWEIS VON LEMMA 2 FÜR $\hat{X}$: Die Topologie von $\hat{X}$ wird durch eine Metrik $\hat{d}$ induziert. (Nach dem Satz von Poincaré-Volterra (vgl. [3], Korollar 3 S. 134) ist mit X auch $\hat{X}$ ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis.) Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $I = [0, 1]$. $\hat{v}: [0, 1] \rightarrow \hat{X}$ sei der über $v: [0, 1] \rightarrow X$ liegende, in $\hat{x}_0$ (+) beginnende Pfad. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu $s \in [0, 1]$ gibt es eine offene Umgebung $W(s)$ von $v(s)$ mit folgender Eigenschaft:

$$(W(s), \hat{v}(s)) \subset \{ \hat{y} : \hat{d}(\hat{v}(s), \hat{y}) < \epsilon/2 \}.$$

Da X lokal wegzusammenhängend ist, gibt es zu $s \in [0, 1]$ eine offene wegzusammenhängende Umgebung $U(s)$ von $v(s)$ mit $U(s) \subset U \cap W(s)$. Schließlich gibt es nach dem Lemma über die Lebesgue'sche Zahl ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

Zu $t \in [0, 1]$ gibt es $s \in [0, 1]$ mit $\{y: d(v(t), y) < \delta\} \subset U(s)$.

Sei nun $w: [0, 1] \rightarrow X$ ein beliebiger in x_0 beginnender Pfad mit $d(v(t), w(t)) < \delta$ für alle t und $\hat{w}: [0, 1] \rightarrow \hat{X}$ der über w liegende, in $\hat{x}_0$ beginnende Pfad. Sei $t \in [0, 1]$ beliebig. Zu t gibt es $s \in [0, 1]$ mit $\{y: d(v(t), y) < \delta\} \subset U(s)$. Aus $d(v(t), w(t)) < \delta$ folgt $w(t) \in U(s)$. Da $U(s)$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg u in $U(s)$ von $v(s)$ nach $w(t)$. Setze $v_0 := \text{Rest } [0, s] v$ und $v_1 := v_0 * u$. Es gilt $(v_1) \in (U(s), \hat{v}(s))$, denn $\hat{v}(s) = (v_0)$ (vgl. [7], 6.6.3, S. 254). Sei $v_2 := \text{Rest } [0, t] w$. Da sowohl v_1 als auch v_2 ganz in U verläuft

(+) $\hat{x}_0$ wird durch den Punkt看eg in x_0 bestimmt.

und U einfachzusammenhängend ist, gilt: v_1 homotop v_2 in X . Also $(v_1) = (v_2)$. Da $(v_2) = \hat{w}(t)$, also $\hat{w}(t) \in (U(s), \hat{v}(s))$, d.h. $\hat{d}(\hat{v}(s), \hat{w}(t)) < \epsilon/2$. Ist also $s = t$, so sind wir fertig. Ist $s \neq t$, so gilt jedenfalls $v(t) \in U(s)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $s < t$. Da $U(s)$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg u in $U(s)$ von $v(s)$ nach $v(t)$. Somit $\hat{v}(t) \in (U(s), \hat{v}(s))$, da $\text{Rest}_{[0,t]} v$ homotop $(\text{Rest}_{[0,s]} v) * u$ in X ist (da U einfachzusammenhängend).

2. Fall: $s > t$. Da $U(s)$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg u in $U(s)$ von $v(t)$ nach $v(s)$. $\text{Rest}_{[0,s]} v$ ist homotop zu $(\text{Rest}_{[0,t]} v) * u$ in X , da U einfachzusammenhängend ist. Also $\hat{v}(s) \in (U(s), \hat{v}(t))$. Somit $(U(s), \hat{v}(s)) = (U(s), \hat{v}(t))$ (vgl. [7], 6.6.1, S. 254). Also $\hat{v}(t) \in (U(s), \hat{v}(s))$.

In beiden Fällen ist also $\hat{v}(t) \in (U(s), \hat{v}(s))$. Für $s \neq t$ gilt somit $\hat{d}(\hat{v}(s), \hat{v}(t)) < \epsilon/2$. Mit obigem Ergebnis $\hat{d}(\hat{v}(s), \hat{w}(t)) < \epsilon/2$ ist also $\hat{d}(\hat{v}(t), \hat{w}(t)) < \epsilon$.

BEWEIS VON LEMMA 2 ALLGEMEIN: Es gibt eine Überlagerungsabbildung $\hat{p}: \hat{X} \rightarrow X$ mit $\hat{p}(\hat{x}_0) = x_0$ und $p \circ \hat{p} = \text{id}$. (Vgl. [7], 6.7.2, S. 262.) Gehören zu $p, \hat{p}, \hat{p}$ die zueinander inversen Abbildungspaare $Q_0 P_0, \hat{Q}_0 \hat{P}_0, \hat{Q}_0 \hat{P}_0$, so gilt $\hat{Q}_0 \circ \hat{P}_0 = P_0$. Die Stetigkeit von $\hat{P}_0$ in v ist eben bewiesen worden und die von $\hat{Q}_0$ in $\hat{v}$ folgt aus Lemma 1. Somit ist P_0 in v stetig.

Wir kehren nun zurück zur allgemeinen Situation.

LEMMA 3. — Die Abbildung P aus Satz 2 ist stetig in

jedem Punkt $(\hat{x}_0, v_0)$, zu dem es eine offene, einfach-zusammenhängende Menge $U \subset X$ gibt mit $v_0(t) \in U$ für alle $t \in I$.

BEWEIS: Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, daß $I = [0, 1]$. Sei $x_0 = p(\hat{x}_0)$ und definiere $w_0: [-1, 1] \rightarrow X$ durch $w_0(t) = x_0$ falls $t \in [-1, 0]$, $= v_0(t)$ falls $t \in [0, 1]$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da die Abbildung P_0 aus Lemma 2 in w_0 stetig ist, bestimmen w_0 und ϵ ein $\delta_0 > 0$. Da $\hat{X}$ lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung $\hat{U}$ von $\hat{x}_0$ mit $p(\hat{U}) \subset \{y: d(x_0, y) < \delta_0\}$. Ferner gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $\{\hat{y}: \hat{d}(\hat{x}_0, \hat{y}) < \delta_1\} \subset \hat{U}$. Setze $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$. Sei nun $(\hat{x}, v)$ ein beliebiges Paar mit $(p(\hat{x}) = v(0))$ und $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_0) < \delta$ ($\leq \delta_1$!) und $d(v(t), v_0(t)) < \delta$ ($\leq \delta_0$!) für alle t . Es folgt $\hat{x} \in \hat{U}$. Da $\hat{U}$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Pfad $\hat{u}: [-1, 0] \rightarrow \hat{X}$ in $\hat{U}$ von $\hat{x}_0$ nach $\hat{x}$. Sei $u := p \circ \hat{u}$ und definiere $w: [-1, 1] \rightarrow X$ durch $w(t) = u(t)$ falls $t \in [-1, 0]$, $= v(t)$ falls $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$d(w(t), w_0(t)) < \delta_0 \text{ für alle } t \in [-1, 1].$$

(Beachte, daß $\hat{u}$ ganz in $\hat{U}$ verläuft.) Nach Lemma 2 folgt für die über w bzw. w_0 liegenden, in $\hat{x}_0$ beginnenden Pfade $\hat{w}$ bzw. $\hat{w}_0$

$$\hat{d}(\hat{w}(t), \hat{w}_0(t)) < \epsilon \text{ für alle } t \in [-1, 1].$$

Wegen $\text{Rest } [0, 1] \hat{w} = P(\hat{x}, v)$ und $\text{Rest } [0, 1] \hat{w}_0 = P(\hat{x}_0, v_0)$, ist damit die Behauptung bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 2: Wir beweisen die Stetigkeit von P in einem beliebigen Punkt $(\hat{x}_0, v_0)$. Wieder o.B.d.A. $I = [0, 1]$. Für jedes $s \in [0, 1]$ liegt der Punkt $v_0(s)$ in einer

offenen einfachzusammenhängenden Menge $U(s) \subset X$. Nach dem Lemma über die Lebesgue'sche Zahl gibt es eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ von $[0, 1]$ derart, daß es zu jedem $\nu \in \{0, \dots, n\}$ ein $s \in [0, 1]$ gibt mit $\{v_\nu(t) : t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]\} \subset U(s)$.

In Lemma 3 wurde bewiesen, daß für jedes kompakte Intervall $I' \subset \mathbb{R}$ die zu dem Paar $(p: \hat{X} \rightarrow X, I')$ gehörige Abbildung $P' = P_{I'}$ stetig ist in jedem Punkt $(\hat{x}'_0, v'_0)$, zu dem es eine offene einfachzusammenhängende Menge $U \subset X$ gibt mit $v'_0(I') \subset U$.

Dieses Ergebnis wollen wir nun anwenden auf die Paare $(p: \hat{X} \rightarrow X, I_\nu)$ ($\nu \in \{0, \dots, n\}$), wobei $I_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1}]$.

Sei $\hat{\varphi}_0 = P(\hat{x}_0, v_0)$ und für $\nu \in \{0, \dots, n\}$ $(\hat{x}''_\nu, v''_\nu) = (\hat{\varphi}_0(t_\nu), \text{Rest}_{I_\nu} v_0)$ und $\hat{\varphi}''_\nu = P_{I_\nu}(\hat{x}''_\nu, v''_\nu)$. Dann $\hat{\varphi}''_\nu = \text{Rest}_{I_\nu} \hat{\varphi}_0$ für alle ν .

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Da für jedes $\nu \in \{0, \dots, n\}$ die Abbildung P_{I_ν} stetig ist in $(\hat{x}''_\nu, v''_\nu)$, gilt:

$(\hat{x}''_0, v''_0)$ und ϵ bestimmen ein $\delta_n > 0$

$(\hat{x}''_0^{n-1}, v''_0^{n-1})$ und $\min(\epsilon, \delta_n)$ bestimmen ein $\delta_{n-1} > 0$

.....

.....

$(\hat{x}''_0^1, v''_0^1)$ und $\min(\epsilon, \delta_2)$ bestimmen ein $\delta_1 > 0$

$(\hat{x}''_0^0, v''_0^0)$ und $\min(\epsilon, \delta_1)$ bestimmen ein $\delta_0 > 0$.

Setze $\delta = \min(\delta_0, \dots, \delta_n)$. Dann $\delta > 0$.

Sei nun $(\hat{x}, v)$ ein beliebiges Paar mit $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_0) < \delta$ und $d(v(t), v_0(t)) < \delta$ für alle $t \in I$. Ist $\hat{\varphi} = P(\hat{x}, v)$, so gilt dann $\hat{d}(\hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}_0(t)) < \epsilon$ für alle $t \in I$:

Setze für jedes $\nu \in \{0, \dots, n\}$ $(\hat{x}''_\nu, v''_\nu) = (\hat{\varphi}(t_\nu), \text{Rest}_{I_\nu} v)$ und

$\varphi'' = P_{I_\nu}(\hat{x}^\nu, v'')$. Dann $\varphi'' = \text{Rest}_{I_\nu} \varphi$ für alle ν .

Nun ist $\hat{d}(\hat{x}^0, \hat{x}_0^0) < \delta \leq \delta_0$ und $d(v^0(t), v_0^0(t)) < \delta \leq \delta_0$ für alle t . Also, da P_{I_0} in $(\hat{x}_0^0, v_0^0)$ stetig ist, $\hat{d}(\varphi^0(t), \varphi_0^0(t)) < \min(\epsilon, \delta_1) \leq \epsilon$ für alle t .

Insbesondere $\hat{d}(\hat{x}^1, \hat{x}_0^1) < \min(\epsilon, \delta_1) \leq \delta_1$. Da $d(v^1(t), v_0^1(t)) < \delta \leq \delta_1$ für alle t und P_{I_1} in $(\hat{x}_0^1, v_0^1)$ stetig ist, also $\hat{d}(\varphi^1(t), \varphi_0^1(t)) < \min(\epsilon, \delta_2) \leq \epsilon$ für alle t .

Insbesondere $\hat{d}(\hat{x}^2, \hat{x}_0^2) < \min(\epsilon, \delta_2) \leq \delta_2$. Usf..

Indem man so sukzessive die Stetigkeit von $P_{I_0}, P_{I_1}, \dots, P_{I_n}$ anwendet, erhält man für jedes $\nu \in \{0, \dots, n\}$

$$\hat{d}(\varphi^\nu(t), \varphi_0^\nu(t)) < \epsilon \text{ für alle } t \in I_\nu.$$

Also

$$\hat{d}(\varphi(t), \varphi_0(t)) < \epsilon \text{ für alle } t \in I,$$

was zu beweisen war.

Für das Folgende seien $X, \hat{X}$ zwei wegzusammenhängende lokalkompakte Räume und $p: \hat{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. $X' = X \cup \{\Delta\}$ bzw. $\hat{X}' = \hat{X} \cup \{\hat{\Delta}\}$ bezeichne die Alexandroffkompaktifizierung von X bzw. $\hat{X}$. Die Abbildung p werde durch $p'(\hat{\Delta}) = \Delta$ zu einer Abbildung $p': \hat{X}' \rightarrow X'$ fortgesetzt. Ferner sei I ein linksseitig abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit linkem

Endpunkt a .

Die Sätze 1 und 2 aus Abschnitt 1 lassen sich sinngemäß auf diese neue Situation übertragen, wenn man für einen lokalkompakten Raum E mit der Alexandroffkompaktifizierung $E' = E \cup \{\Delta\}$ die Menge $C(I, E)$ ersetzt durch die Menge $C_{\Delta}(I, E)$ aller stetigen Abbildungen $v: I \rightarrow E'$, die von Δ absorbiert werden, d.h. für die gilt: $v(s) = \Delta$ für ein $s \in I$ impliziert $v(t) = \Delta$ für alle $t \in I$ mit $t \geq s$. Wir wollen uns darauf beschränken, die neuen Sätze lediglich zu formulieren, ohne ihre einfache Ableitung aus den Sätzen 1 und 2 anzugeben.

SATZ 3. — Zu jedem Paar $(\hat{x}, v) \in \hat{X}' \times C_{\Delta}(I, X)$ mit $p'(\hat{x}) = \sqrt{v(a)}$ gibt es genau eine Abbildung $\hat{v} \in C_{\Delta}(I, \hat{X})$ mit $\hat{v}(a) = \hat{x}$ und $p' \circ \hat{v} = v$.

Wir setzen nun außerdem voraus, daß X eine abzählbare Basis besitzt, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach-zusammenhängend ist und daß das Intervall I kompakt ist.

SATZ 4. — Die durch p' nach Satz 3 induzierte Abbildung $P': (\hat{x}, v) \rightarrow \hat{v}$ der Menge aller Paare $(\hat{x}, v) \in \hat{X}' \times C_{\Delta}(I, X)$ mit $p'(\hat{x}) = v(a)$ in die Menge $C_{\Delta}(I, \hat{X})$ ist stetig, wenn auf $C_{\Delta}(I, X)$ und $C_{\Delta}(I, \hat{X})$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz betrachtet wird.

K A P I T E L 2

1

Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, die eine abzählbare Basis besitzt und wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfachzusammenhängend ist. Sei ρ eine die Topologie definierende translationsinvariante Metrik auf G und setze für $x \in G$ $|x| = \rho(x, 0)$, wo 0 das neutrale Element von G bezeichnet.

Auf $(G, \underline{G})$ (+) betrachten wir einen nicht abbrechenden stetigen Markoffprozeß $X = (W, \underline{M}, (\underline{M}_t), (X_t), (\theta_t), (P_x))$ (++), der translationsinvariant ist, d.h. für den $P_{z+x} \{X_t \in z+A\} = P_x \{X_t \in A\}$ für alle $z, x \in G, A \in \underline{G}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Die nachstehenden Definitionen werden sich im folgenden als sehr nützlich erweisen. (+++)

$$P := P_0$$

$$\underline{N} := \underline{A}(X_u - X_0 : u \in [0, \infty[)$$

$$\underline{N}_t := \underline{A}(X_u - X_0 : u \in [0, t])$$

(+) $\underline{G}$ bezeichne die Borelsche σ -Algebra auf G .

(++) Vgl. Terminologie, Absatz 7, S. 8.

(+++ Vgl. das folgende Lemma 1 und den Beweis von Lemma 5, S. 32, wo Lemma 1 verwendet wird.

(Für $I \subset \mathbb{R}_+$ bezeichne $\underline{A}(X_u - X_0 : u \in I)$ die von den Zufallsvariablen $X_u - X_0$ ($u \in I$) erzeugte σ -Algebra.)

Es gilt dann $\underline{N}_s \subset \underline{N}_t \subset \underline{N} \subset \underline{M}$ und $\underline{N}_t \subset \underline{M}_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$.

LEMMA 1. — Für jede beschränkte $\underline{N}$ -meßbare Funktion $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \rightarrow E_x(\xi)$ konstant. (+)

BEWEIS: Für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_1 < \dots < u_n < +\infty$ und $B_1, \dots, B_n \in \underline{G}$ gilt für beliebige $x, y \in G$ wegen der Translationsinvarianz von X

$$\begin{aligned} P_x \{ X_{u_1} - X_0 \in B_1, \dots, X_{u_n} - X_0 \in B_n \} &= \\ P_x \{ X_{u_1} \in x + B_1, \dots, X_{u_n} \in x + B_n \} &= \\ P_y \{ X_{u_1} \in y + B_1, \dots, X_{u_n} \in y + B_n \} &= \\ P_y \{ X_{u_1} - X_0 \in B_1, \dots, X_{u_n} - X_0 \in B_n \} &. \end{aligned}$$

Damit hat man für jedes $A \in \underline{N}$ $P_x(A) = P_y(A)$ für beliebige $x, y \in G$, woraus die Behauptung in der üblichen Weise gefolgert werden kann.

Das folgende triviale Lemma soll lediglich das Verständnis der nachfolgenden Betrachtungen erleichtern.

LEMMA 2. — Für jedes $(s, x, w) \in \mathbb{R}_+ \times G \times W$ wird durch

$$Y_t(s, x, w) = x + X_t(w) - X_s(w)$$

eine Abbildung $Y(s, x, w) : [s, +\infty[\rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften definiert (++):

(+) Vgl. auch [6], Vol. 1, Abschnitt 7.23, S. 245.

(++) $Y_t(s, x, w)$ bezeichne den Wert der Abbildung $Y(s, x, w)$ an der Stelle t .

(0) Für jedes x sind die stochastischen Prozesse $((Y_t(0,x)), P)$ (+) und $((X_t), P_x)$ äquivalent (++).

(1) Für beliebige s, x, w ist $t \rightarrow Y_t(s, x, w)$ stetig und es gilt $Y_s(s, x, w) = x$.

(2) Für beliebige $s \leq t, x$ ist $w \rightarrow Y_t(s, x, w)$ N_t -meßbar.

(3) Für beliebige $s \leq t, x, w$ gilt

$$Y_u(t, Y_t(s, x, w), w) = Y_u(s, x, w)$$

für alle $u \geq t$.

(4) Für beliebige $0 \leq h \leq s \leq t, x, w$ ist

$$Y_{t-h}(s-h, x, \theta_h(w)) = Y_t(s, x, w).$$

(5) Für $s \leq t, x \in G$ und jede Folge (x_n) in G folgt aus

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0$$

für alle $w \in W$

$$\sup_{s \leq u \leq t} \rho(Y_u(s, x_n, w), Y_u(s, x, w)) \rightarrow 0.$$

BEWEIS: Klar.

Sei nun U eine offene und zusammenhängende Teilmenge von G und $U' = U \cup \{\Delta\}$ die Alexandroffkompaktifizierung von U mittels Δ . d' sei eine die Topologie definierende Metrik auf U' .

Der Prozeß $X^U = (W, \underline{M}, (\underline{M}_t^U), (X_t^U), (\theta_t^U), (P_x^U))$ entstehe durch Restriktion von X auf U . (Vgl. Terminologie, Absatz 10, S. 9.)

Definiere für $(s, x, w) \in \mathbb{R}_+ \times U' \times W$ eine Abbildung

(+) $Y_t(s, x)$ bezeichne die Zufallsvariable $w \rightarrow Y_t(s, x, w)$.

(++) Vgl. Terminologie, Absatz 4, S. 6.

$$Y^U(s, x, w) : [s, +\infty[\longrightarrow U'$$

durch

$$\begin{aligned} x \in U: \quad Y_t^U(s, x, w) &= \begin{cases} Y_t(s, x, w) & t < \zeta(s, x, w) \\ \Delta & t \geq \zeta(s, x, w) \end{cases} \\ x = \Delta: \quad Y_t^U(s, x, w) &= \Delta \quad \text{für alle } t \geq s \end{aligned}$$

wobei $\zeta(s, x, w) = \inf \{ t \geq s : Y_t(s, x, w) \notin U \}$ für $x \in U$.

Die Eigenschaften (0) - (4) in Lemma 2 lassen sich nunmehr wie folgt auf $Y^U(s, x, w)$ übertragen.

LEMMA 3. — Die Abbildung $Y^U(s, x, w)$ hat folgende Eigenschaften:

(0) Für jedes $x \in U$ sind die stochastischen Prozesse $((Y_t^U(0, x)), P)$ und $((X_t^U), P_x^U)$ äquivalent.

(1) Für beliebige $0 \leq s, x \in U', w \in W$ gehört die Abbildung $t \longrightarrow Y_t^U(s, x, w)$ zu $C_\Delta([s, +\infty[, U)$ und es gilt $Y_s^U(s, x, w) = x$.

(2) Für beliebige $0 \leq s \leq t, x \in U'$ ist $w \longrightarrow Y_t^U(s, x, w)$ $\mathbb{N}_t$ -meßbar.

(3) Für beliebige $0 \leq s \leq t, x \in U', w \in W$ gilt

$$Y_u^U(t, Y_t^U(s, x, w), w) = Y_u^U(s, x, w)$$

für alle $u \geq t$.

(4) Für beliebige $0 \leq h \leq s \leq t, x \in U', w \in W$ ist

$$Y_{t-h}^U(s-h, x, \theta_h(w)) = Y_t^U(s, x, w).$$

BEWEIS: (0) Sei $x \in U$ vorgegeben. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $W = C(\mathbb{R}_+, G)$ und $X_t(w) = w(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist. Definiere $\theta : W \longrightarrow W$ durch $(\theta(w))(t) = w(t) - x$ ($t \in \mathbb{R}_+$).

Für alle $w \in \{X_0 = x\}$ gilt dann

$$Y_t(0, x, \theta(w)) = X_t(w) \text{ für alle } t \geq 0,$$

also

$$\zeta(0, x, \theta(w)) = \zeta(w),$$

wo $\zeta(w) = \inf \{t \geq 0 : X_t(w) \in \mathbb{C} \cup \}$ gesetzt wurde, und somit

$$Y_t^U(0, x, \theta(w)) = X_t^U(w) \text{ für alle } t \geq 0$$

nach Definition von X^U . Da $P_x \{X_0 = x\} = 1$, gilt für $n \in \mathbb{N}$,

$0 \leq t_1 < \dots < t_n < +\infty$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}'^{(+)}$

$$P_x^U \{X_{t_1}^U \in B_1, \dots, X_{t_n}^U \in B_n\} =$$

$$P_x(\theta^{-1} \{Y_{t_1}^U(0, x) \in B_1, \dots, Y_{t_n}^U(0, x) \in B_n\}) =$$

$$P \{Y_{t_1}^U(0, x) \in B_1, \dots, Y_{t_n}^U(0, x) \in B_n\},$$

denn wegen der Translationsinvarianz von X gilt für alle

$$A \in \mathcal{M} \quad P_x(\theta^{-1}(A)) = P(A).$$

(1) Es genügt zu zeigen, daß die Abbildung $t \rightarrow Y_t^U(s, x, w)$ für jedes s, x, w stetig ist. Ist $x = \Delta$, so gilt für alle $t \geq s$ $Y_t^U(s, x, w) = \Delta$. In diesem Falle ist die Abbildung also trivialerweise stetig. Sei nun $x \neq \Delta$. In diesem Fall genügt es, den Fall $\zeta(s, x, w) < +\infty$ zu betrachten. Sei (t_n) eine Folge in $[s, +\infty[$ mit $t_n \uparrow \zeta(s, x, w)$. Es gilt $Y_{t_n}^U(s, x, w) \rightarrow Y_{\zeta(s, x, w)}(s, x, w)$ in G . Sei nun K eine beliebige kompakte Teilmenge von U . Dann ist $G \setminus K$ offen in G und $Y_{\zeta(s, x, w)}(s, x, w) \in G \setminus K$. Also

$$(\exists n_0) (\forall n \geq n_0) \quad Y_{t_n}^U(s, x, w) \in U' \setminus K.$$

Also $Y_{t_n}^U(s, x, w) \rightarrow \Delta$ in U' . Nun ist aber $Y_{t_n}^U(s, x, w) = Y_{t_n}(s, x, w)$ und $Y_{\zeta(s, x, w)}(s, x, w) = \Delta$. Damit hat man die Ste-

(*) $\mathcal{U}'$ ist die Borelsche σ -Algebra auf U' .

tigkeit der Abbildung $t \rightarrow Y_t^U(s, x, w)$ im Punkte $\zeta(s, x, w)$ woraus die Stetigkeit von $t \rightarrow Y_t^U(s, x, w)$ auf ganz $[s, +\infty[$ folgt.

(2) Da für alle $u \geq s$ $w \rightarrow Y_u(s, x, w)$ $\mathbb{N}_u$ -meßbar ist, ist $w \rightarrow \zeta(s, x, w)$ eine $(\mathbb{N}_u)_{u \geq s}$ -Stopzeit. Sei nun $x \in U$ und B eine meßbare Teilmenge von U' . Es gilt

$$\{Y_t^U(s, x) \in B\} = \left[\{Y_t^U(s, x) \in B\} \cap \{\zeta(s, x) \leq t\} \right] \cup \left[\{Y_t^U(s, x) \in B\} \cap \{\zeta(s, x) > t\} \right].$$

Der erste Durchschnitt ist die Menge $\{\zeta(s, x) \leq t\}$, falls $\Delta \in B$ und leer, falls $\Delta \notin B$. Der zweite Durchschnitt ist die Menge $\{Y_t(s, x) \in B\} \cap \{\zeta(s, x) > t\}$. So ergibt sich: $\{Y_t^U(s, x) \in B\} \in \mathbb{N}_t$. Ist $x \notin U$, also $x = \Delta$, so ist wegen

$$Y_t^U(s, x, w) = \Delta \quad \text{für alle } w$$

$Y_t^U(s, x)$ trivialerweise meßbar.

(3) Ist $x = \Delta$, so ist (3) trivialerweise richtig. Sei also nun $x \neq \Delta$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $t < \zeta(s, x, w)$. Es gilt $\zeta(t, Y_t(s, x, w), w) = \zeta(s, x, w)$. Denn wegen Gleichung (3) in Lemma 2 gilt zunächst $\zeta(t, Y_t(s, x, w), w) = \inf \{r \geq t: Y_r(s, x, w) \notin U\} \geq \zeta(s, x, w)$. Wäre $\zeta(s, x, w) < \inf \{r \geq t: Y_r(s, x, w) \notin U\}$, so würde es eine Zahl a mit $s \leq a < \inf \{r \geq t: Y_r(s, x, w) \notin U\}$ und $Y_a(s, x, w) \notin U$ geben. Da $t < \zeta(s, x, w)$ und $\zeta(s, x, w) \leq a$, ist $a > t$. Also $\inf \{r \geq t: Y_r(s, x, w) \notin U\} \leq a$. Widerspruch! Ist also $u < \zeta(s, x, w)$, so auch $u < \zeta(t, Y_t(s, x, w), w)$. Somit in diesem Fall linke Seite $= Y_u^U(t, Y_t(s, x, w), w) = Y_u(t, Y_t(s, x, w), w) = Y_u(s, x, w)$ und rechte Seite $= Y_u(s, x, w)$. Ist $u \geq \zeta(s, x, w)$, so auch $u \geq \zeta(t, Y_t(s, x, w), w)$. Also linke Seite $= Y_u^U(t, Y_t(s, x, w), w) = \Delta$ und rechte Seite $= \Delta$.

2. Fall: $t \geq \zeta(s, x, w)$. Es ist auch $u \geq \zeta(s, x, w)$ und somit linke Seite = $Y_u^U(t, \Delta, w) = \Delta$ und rechte Seite = Δ .

(4) Es ist $\zeta(s, x, \theta_h(w)) + h = \zeta(s+h, x, w)$. Denn wäre $\zeta(s, x, \theta_h(w)) + h < \zeta(s+h, x, w)$, so würde es eine Zahl $t \geq s$ mit $Y_t(s, x, \theta_h(w)) \notin U$ und $t+h < \zeta(s+h, x, w)$ geben. Somit wäre $Y_{t+h}(s+h, x, w) \in U$. Andererseits ist aber $Y_{t+h}(s+h, x, w) = Y_t(s, x, \theta_h(w)) \notin U$. Widerspruch! Wäre $\zeta(s, x, \theta_h(w)) + h > \zeta(s+h, x, w)$, so gäbe es eine Zahl $u \geq s+h$ mit $Y_u(s+h, x, w) \notin U$ und $u-h < \zeta(s, x, \theta_h(w))$. Somit $Y_{u-h}(s, x, \theta_h(w)) \in U$. Andererseits $Y_{u-h}(s, x, \theta_h(w)) = Y_u(s+h, x, w) \notin U$. Widerspruch! Somit $t < \zeta(s, x, \theta_h(w))$ dann und nur dann, wenn $t+h < \zeta(s+h, x, w)$. Hieraus folgt die Gleichung (4) für $x \in U$. Für $x = \Delta$ gilt sie trivialerweise.

Die Eigenschaft (5) in Lemma 2 läßt sich nicht immer auf Y^U übertragen, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

BEISPIEL.— Sei $G = \mathbb{R}^2$, X die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $v = (1, 0)$ auf G und $U =]-3, 3[\times]-3, 3[\setminus [-1, 1] \times \{0\}$. X ist ein stetiger translationsinvarianter Markoffprozeß auf G (vgl. [1]) und U ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge von G .

Sei $s := 0$ und $t := 4$. Für $x = (-2, 0)$ und $x_n = (-2, 1/n)$ gilt zwar $d'(x_n, x) \rightarrow 0$. Es gilt aber keineswegs

$$\sup_{0 \leq u \leq t} d'(Y_u^U(x_n), Y_u^U(x)) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

Denn für alle $w \in W$ ist $Y_t^U(x, w) = \Delta$, da $\zeta(x, w) = 1 \leq 4$ und $Y_t^U(x_n, w) = (2, 1/n)$, da $\zeta(x_n, w) = 5 > 4$. (Man beachte, daß für beliebiges $z \in G$ und für beliebiges $w \in W$ $Y_u(z, w) = z + u.v$ für

beliebiges $u \in R_+$ gilt.) Nun gibt es eine kompakte Teilmenge K von U derart, daß $(2, 1/n) \in K$ für alle n . Also

$$d'(Y_t^U(x_n), Y_t^U(x)) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

Wir verlangen deshalb, daß die Menge U von nun an der folgenden Bedingung genügt.

BEDINGUNG (F). — Sei $s \leq t$ und $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ $\mathbb{N}_s$ -meßbare Abbildungen von W in U . Aus

$$d'(\eta_n, \eta) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

folgt

$$\sup_{s \leq u \leq t} d'(Y_u^U(s, \eta_n), Y_u^U(s, \eta)) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

Wir werden weiter unten (in Abschnitt 3) zeigen, daß es eine große Klasse von Mengen U gibt, die dieser Bedingung genügen.

2

Sei nun $p: \hat{U} \rightarrow U$ eine beliebige Überlagerung von U . $\hat{U}' = \hat{U} \cup \{\hat{\Delta}\}$ sei die Alexandroffkompaktifizierung von $\hat{U}$ mittels $\hat{\Delta}$ und durch $p'(\hat{\Delta}) = \Delta$ werde p zu einer Abbildung $p': \hat{U}' \rightarrow U'$ fortgesetzt. $\hat{d}'$ sei eine die Topologie definierende Metrik

auf $\hat{U}'$. (+) Man beachte, daß U ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis ist, der wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfachzusammenhängend ist und daß somit die Ergebnisse aus Kapitel 1 auf die Überlagerung $p: \hat{U} \rightarrow U$ angewendet werden können.

Definiere für jedes $(s, x, w) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{U}' \times W$ eine Abbildung

$$\hat{Y}(s, x, w): [s, +\infty[\rightarrow \hat{U}'$$

durch

- (a) $\hat{Y}_s(s, x, w) = x$
- (b) $p'(\hat{Y}_t(s, x, w)) = Y_t^U(s, p'(x), w)$ für alle $t \geq s$
- (c) $\hat{Y}(s, x, w) \in C_{\hat{\Delta}}([s, +\infty[, \hat{U}')$

(Wegen Kapitel 1, Satz 3 und Kapitel 2, Lemma 3, (1) ist dies in eindeutiger Weise möglich.)

LEMMA 4. — Die Abbildung $\hat{Y}(s, x, w)$ besitzt folgende Eigenschaften:

(1) Für beliebige $s \leq t, x \in \hat{U}'$ ist $w \rightarrow \hat{Y}_t(s, x, w)$ $\mathbb{N}_t$ -meßbar.

(2) Für beliebige $s \leq t, x \in \hat{U}', w \in W$ gilt

$$\hat{Y}_u(t, \hat{Y}_t(s, x, w), w) = \hat{Y}_u(s, x, w)$$

für alle $u \geq t$.

(3) Für beliebige $0 \leq h \leq s \leq t, x \in \hat{U}', w \in W$ ist

$$\hat{Y}_{t-h}(s-h, x, \theta_h(w)) = \hat{Y}_t(s, x, w).$$

(4) Ist $s \leq t$ und sind $\hat{\eta}, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots$ $\mathbb{N}_s$ -meßbare Abbil-

(+) Nach dem Satz von Poincaré-Volterra (vgl. [3], Korollar 3 S. 134) ist mit U auch $\hat{U}$ ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis, so daß die Alexandroffkompaktifizierung von $\hat{U}$ existiert und der Raum $\hat{U}'$ metrisierbar ist.

dungen von W in $\hat{U}$, so gilt: Aus

$$\hat{d}'(\hat{\eta}_n, \hat{\eta}) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

folgt

$$\hat{d}'(\hat{Y}_t(s, \hat{\eta}_n), \hat{Y}_t(s, \hat{\eta})) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü.}$$

Zum Beweis von Lemma 4 verwenden wir das folgende bekannte Lemma. (Vgl. [9], Theorem 2.1 S. 212.)

LEMMA.— Sei I ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, X ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis und A eine Menge stetiger Abbildungen $v: I \rightarrow X$. Für $u \in I$ sei $p_u: A \rightarrow X$ die u -te Projektion, d.h. $p_u(v) = v(u)$. Ist τ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf A , so gilt: Die von τ erzeugte σ -Algebra $\underline{A}(\tau)$ ist gleich der von den Projektionen p_u ($u \in I$) erzeugten σ -Algebra $\underline{A}(p_u: u \in I)$.

BEWEIS VON LEMMA 4: (1) Sei $s \leq t$ und $x \in \hat{U}'$. Setze

$$C := \{v \in C_\Delta([s, t], U) : v(s) = p'(x)\}$$

$$\hat{C} := \{\hat{v} \in C_\Delta([s, t], \hat{U}) : \hat{v}(s) = x\}$$

und definiere

$$Q: C \rightarrow \hat{C}$$

als inverse Abbildung der Bijektion $\hat{v} \rightarrow p' \circ \hat{v}$. (Vgl. Kapitel 1, Satz 3.) Nach Kapitel 1, Satz 4 ist Q stetig bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf C und $\hat{C}$. Bezeichnet für $u \in [s, t]$ $p_u: C \rightarrow U'$ bzw. $\hat{p}_u: \hat{C} \rightarrow \hat{U}'$ die u -te Projektion von C auf U' bzw. von $\hat{C}$ auf $\hat{U}'$ und $\underline{A}$ bzw. $\hat{\underline{A}}$ die von den Abbildungen p_u bzw. $\hat{p}_u$ ($u \in [s, t]$) erzeugte σ -Algebra, so folgt nach obigem Lemma: Q ist $\underline{A} - \hat{\underline{A}}$ -

meßbar.

Definiere nun

$$r: W \rightarrow C$$

durch $r(w)(u) = Y_u^U(s, p'(x), w)$. r ist $\underline{N}_t - \underline{A}$ -meßbar, denn für alle $u \in [s, t]$ ist $p_u \circ r = Y_u^U(s, p'(x))$ und diese Abbildung ist wegen Lemma 3, (2) $\underline{N}_t$ -meßbar. Wegen $\hat{p}_t \circ Q \circ r = \hat{Y}_t(s, x)$ ist somit $\hat{Y}_t(s, x)$ $\underline{N}_t$ -meßbar.

(2) Definiere $\hat{v}: [t, +\infty[\rightarrow \hat{U}'$ durch $\hat{v}(u) = \hat{Y}_u(s, x, w)$ und $\hat{w}: [t, +\infty[\rightarrow \hat{U}'$ durch $\hat{w}(u) = \hat{Y}_u(t, \hat{Y}_t(s, x, w), w)$. Dann $\hat{v}, \hat{w} \in C_{\hat{\Delta}}([t, +\infty[, \hat{U}')$ und $\hat{v}(t) = \hat{Y}_t(s, x, w) = \hat{w}(t)$. Ferner ist wegen Lemma 3, (3) $p'(\hat{w}(u)) = Y_u^U(t, p'(\hat{Y}_t(s, x, w)), w) = Y_u^U(t, Y_t^U(s, p'(x), w), w) = Y_u^U(s, p'(x), w) = p'(\hat{v}(u))$. Nach Kapitel 1, Satz 3 folgt $\hat{v} = \hat{w}$, was zu zeigen war.

(3) Definiere $\hat{v}: [s, +\infty[\rightarrow \hat{U}'$ durch $\hat{v}(u) = \hat{Y}_u(s, x, w)$ und $\hat{w}: [s, +\infty[\rightarrow \hat{U}'$ durch $\hat{w}(u) = \hat{Y}_{u-h}(s-h, x, \theta_h(w))$. Dann $\hat{v}, \hat{w} \in C_{\hat{\Delta}}([s, +\infty[, \hat{U}')$ und $\hat{v}(s) = x = \hat{w}(s)$. Ferner ist wegen Lemma 3, (4) $p'(\hat{w}(u)) = Y_{u-h}^U(s-h, p'(x), \theta_h(w)) = Y_u^U(s, p'(x), w) = p'(\hat{v}(u))$. Nach Kapitel 1, Satz 3 folgt $\hat{v} = \hat{w}$.

(4) Definiere $\eta, \eta_n: W \rightarrow U$ durch $\eta = p \circ \hat{\eta}$, $\eta_n = p \circ \hat{\eta}_n$. Dann gilt, da p stetig ist

$$d'(\eta_n, \eta) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü..}$$

Nach obiger Bedingung (F) also

$$\sup_{s \leq u \leq t} d'(Y_u^U(s, \eta_n), Y_u^U(s, \eta)) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü..}$$

Es gibt also eine Nullmenge $\bar{W} \subset W$ (bezüglich P) derart, daß für alle $w \in W \setminus \bar{W}$ gilt

$$d'(\hat{\eta}_n(w), \hat{\eta}(w)) \rightarrow 0$$

und

$$\sup_{s \leq u \leq t} d'(Y_u^U(s, \eta_n(w), w), Y_u^U(s, \eta(w), w)) \rightarrow 0.$$

Nach Kapitel 1, Satz 4 folgt hieraus für alle $w \in W \setminus \bar{W}$

$$\sup_{s \leq u \leq t} \hat{d}'(\hat{Y}_u(s, \hat{\eta}_n(w), w), \hat{Y}_u(s, \hat{\eta}(w), w)) \rightarrow 0.$$

Damit ist insbesondere gezeigt, daß

$$\hat{d}'(\hat{Y}_t(s, \hat{\eta}_n), \hat{Y}_t(s, \hat{\eta})) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.ü..}$$

LEMMA 5.— Ist $h, t \in \mathbb{R}_+$ und $f: \hat{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Borel-meßbare Funktion, so gilt:

(1) Die durch

$$\hat{F}_f^h(z) = E(f \circ \hat{Y}_h(0, z))$$

definierte Funktion $\hat{F}_f^h: \hat{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-meßbar.

(2) Für jede $\mathbb{N}_t$ -meßbare Abbildung $\hat{\eta}: W \rightarrow \hat{U}'$ ist

$$E(f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}) \mid \mathbb{N}_t) = \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta} \quad P\text{-f.ü..}$$

BEWEIS: (1) Rest $\hat{U}'$ ist stetig für stetiges $f: \hat{U}' \rightarrow \mathbb{R}$, denn ist $z \in \hat{U}$ und (z_n) eine Folge in $\hat{U}$ mit $z_n \rightarrow z$, so gilt nach Lemma 4, (4)

$$\hat{Y}_h(0, z_n) \rightarrow \hat{Y}_h(0, z) \quad P\text{-f.ü..}$$

Also auch

$$f \circ \hat{Y}_h(0, z_n) \rightarrow f \circ \hat{Y}_h(0, z) \quad P\text{-f.ü..}$$

Nach dem Satz von Lebesgue also

$$\hat{F}_f^h(z_n) = E(f \circ \hat{Y}_h(0, z_n)) \rightarrow E(f \circ \hat{Y}_h(0, z)) = \hat{F}_f^h(z).$$

Mit der Stetigkeit von Rest $\hat{U}'$ hat man die Meßbarkeit von $\hat{F}_f^h$ für stetiges f und hieraus folgt die Meßbarkeit von $\hat{F}_f^h$ für beschränktes meßbares f durch die übliche Approximation.

(2) Dader metrische Raum $\hat{U}$ eine abzählbare Basis besitzt, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $(B_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ von $\hat{U}$ in Borelsche Mengen B_k^n mit Durchmesser $\leq 1/n$. Sei z_k^n ein beliebiger Punkt in B_k^n . Definiere für $n \in \mathbb{N}$ $g_n: \hat{U} \rightarrow \hat{U}$ durch

$$g_n(z) = z_k^n \quad \text{wenn } z \in B_k^n.$$

g_n ist meßbar und es gilt $g_n(z) \rightarrow z$ für alle $z \in \hat{U}$.

Sei nun $f: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (und beschränkt) und $\hat{\eta}: W \rightarrow \hat{U}$ eine $\mathbb{N}_t$ -meßbare Abbildung mit $\hat{\eta}(W) \subset \hat{U}$. Dann ist für $A \in \mathbb{N}_t$

$$(+)$$

$$E(1_A \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta})) = E(1_A \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}).$$

Dazu sei $A_k^n := A \cap \{\hat{\eta} \in B_k^n\}$ und $\hat{\eta}_n := g_n(\hat{\eta})$. Für $w \in A_k^n$ ist dann (man beachte Lemma 4, (3)):

$$\begin{aligned} f(\hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}_n(w), w)) &= f(\hat{Y}_{t+h}(t, g_n(\hat{\eta}(w)), w)) = \\ &= f(\hat{Y}_{t+h}(t, z_k^n, w)) \\ &= f(\hat{Y}_h(0, z_k^n, \theta_t(w))) \end{aligned}$$

und

$$E(f \circ \hat{Y}_h(0, z_k^n)) = \hat{F}_f^h(z_k^n) = \hat{F}_f^h(g_n(\hat{\eta}(w))) = \hat{F}_f^h(\hat{\eta}_n(w)).$$

Somit mittels der Markoffeigenschaft von X (man beachte Kapitel 2, Lemma 1):

$$\begin{aligned} E(1_{A_k^n} \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}_n)) &= E(1_{A_k^n} \cdot (f \circ \hat{Y}_h(0, z_k^n)) \circ \theta_t) = \\ &= E(1_{A_k^n} \cdot E_{X_t}(f \circ \hat{Y}_h(0, z_k^n))) = \\ &= E(1_{A_k^n} \cdot E(f \circ \hat{Y}_h(0, z_k^n))) = \\ &= E(1_{A_k^n} \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}_n). \end{aligned}$$

Durch Summation über k bei festem n erhält man

$$E(1_A \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}_n)) = E(1_A \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}_n).$$

Da für alle $w \in W$ $\hat{\eta}_n(w) \rightarrow \hat{\eta}(w)$ (in $\hat{U}$), folgt aus Lemma 4(4)

$$f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}_n) \rightarrow f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}) \quad P\text{-f.ü.}$$

(Beachte, daß f stetig ist.) Aus der Stetigkeit von $\text{Rest}_{\hat{U}} \hat{F}_f^h$ folgt

$$\hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}_n \rightarrow \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}.$$

Also hat man mittels des Satzes von Lebesgue

$$E(1_A \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta})) = E(1_A \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}).$$

Sei nun $\hat{\eta}: W \rightarrow \hat{U}'$ eine beliebige $\underline{N}_t$ -meßbare Abbildung
Sei $a \in \hat{U}$ und $\bar{W} = \{\hat{\eta} \neq \hat{\Delta}\}$. Definiere $\hat{\eta}_0: W \rightarrow \hat{U}'$ durch

$$\hat{\eta}_0(w) = \begin{cases} \hat{\eta}(w) & w \in \bar{W} \\ a & w \in \mathbb{C}\bar{W} \end{cases}$$

Dann ist $\hat{\eta}_0$ $\underline{N}_t$ -meßbar, $\hat{\eta}_0(W) \subset \hat{U}$ und $\text{Rest}_{\bar{W}} \hat{\eta}_0 = \text{Rest}_{\bar{W}} \hat{\eta}$.

Sei $A \in \underline{N}_t$. $A = (A \cap \bar{W}) \cup (A \cap \mathbb{C}\bar{W}) =: A_1 \cup A_2$. Da $A_1 = A \cap \bar{W} \in \underline{N}_t$ ist, folgt nach (+)

$$E(1_{A_1} \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}_0)) = E(1_{A_1} \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}_0).$$

Da $\text{Rest}_{A_1} \hat{\eta}_0 = \text{Rest}_{A_1} \hat{\eta}$, also auch

$$(++) \quad E(1_{A_1} \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta})) = E(1_{A_1} \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}).$$

Andererseits ist für $w \in A_2 = A \cap \mathbb{C}\bar{W}$:

$$f(\hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta}(w), w)) = f(\hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\Delta}, w)) = f(\hat{\Delta})$$

und

$$\hat{F}_f^h(\hat{\eta}(w)) = \hat{F}_f^h(\hat{\Delta}) = E(f \circ \hat{Y}_h(0, \hat{\Delta})) = E(f(\hat{\Delta})) = f(\hat{\Delta}).$$

Also ist auch

$$(+++)$$

$$E(1_{A_2} \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta})) = E(1_{A_2} \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}).$$

Durch Summation von (++) und (+++) erhält man schließlich

$$E(1_A \cdot f \circ \hat{Y}_{t+h}(t, \hat{\eta})) = E(1_A \cdot \hat{F}_f^h \circ \hat{\eta}).$$

Diese Gleichung läßt sich in der üblichen Weise auf beschränktes meßbares f ausdehnen.

Sei nun $\hat{W} = C_{\hat{\Delta}}(R_+, \hat{U})$ und $(\hat{W}, \hat{\underline{M}}, (\hat{\underline{M}}_t), (\hat{X}_t), (\hat{\Theta}_t))$ die zu $\hat{W}$ gehörende kanonische Zufallsfunktion (mit Translationsoperatoren $\hat{\Theta}_t$). (†) Definiert man für $x \in \hat{U}'$ die Abbildung γ_x :

(†) D.h. wir setzen $\hat{X}_t(\hat{w}) = \hat{w}(t)$ und $\hat{\Theta}_t(\hat{w}) = (s \rightarrow \hat{w}(t+s))$ und definieren $\hat{\underline{M}}$ bzw. $\hat{\underline{M}}_t$ als die von der Familie $(\hat{X}_u)_{u \in [0, +\infty[}$ bzw. $(\hat{X}_u)_{u \in [0, t]}$ erzeugte σ -Algebra.

$W \longrightarrow \hat{W}$ durch $(\gamma_x(w))(t) = \hat{Y}_t(0, x, w) = \hat{Y}_t(x, w)$, so ist γ_x $\underline{M} - \hat{\underline{M}}$ -meßbar (+) und man kann somit für $x \in \hat{U}'$ setzen: $\hat{P}_x = \gamma_x(P)$.

SATZ 1. — $\hat{X} = (\hat{W}, \hat{\underline{M}}, (\hat{\underline{M}}_t), (\hat{X}_t), (\hat{\theta}_t), (\hat{P}_x))$ ist ein stetiger Markoffprozeß auf $\hat{U}$ (eventuell abbrechend) derart, daß für jedes $x \in \hat{U}$ die stochastischen Prozesse $((p' \circ \hat{X}_t), \hat{P}_x)$ und $((\hat{X}_t^U), P_{\hat{P}(x)}^U)$ äquivalent sind.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst: Durch $\hat{F}(t, x, A) = \hat{F}_{1_A}^t(x)$ wird eine (Markoffsche) Übergangsfunktion auf $\hat{U}'$ definiert und für jedes $x \in \hat{U}$ ist $(W, \underline{M}, P, (\underline{N}_t), (\hat{Y}_t(x)))$ ein Markoffscher Prozeß auf $\hat{U}'$ mit Übergangsfunktion $\hat{F}.$ (++)

Nun, für jede beschränkte meßbare Funktion $f: \hat{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebige $h, t \in \mathbb{R}_+, x \in \hat{U}$ ist nach Lemma 5

$$(\dagger) \quad E(f \circ \hat{Y}_{t+h}(x) | \underline{N}_t) = \hat{F}_f^h \circ \hat{Y}_t(x) \quad P\text{-f.ü..}$$

Denn $\hat{\eta} = \hat{Y}_t(x)$ ist $\underline{N}_t$ -meßbar und nach Lemma 4, (2) gilt $\hat{Y}_{t+h}(t, \hat{Y}_t(x)) = \hat{Y}_{t+h}(x)$.

Ferner ist $\hat{F}$ eine Übergangsfunktion: Wir brauchen nur noch die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung, also

$$\hat{F}(t+h, x, A) = \int \hat{F}(t, x, dy) \hat{F}(h, y, A)$$

nachzuprüfen. Dies folgt aber sofort aus (\dagger) für $f = 1_A$.

Nun sind für jedes $x \in \hat{U}$ die stochastischen Prozesse $(\hat{W}, \hat{\underline{M}}, \hat{P}_x, (\hat{X}_t))$ und $(W, \underline{M}, P, (\hat{Y}_t(x)))$ äquivalent, denn per definitionem gilt ja $\hat{X}_t \circ \gamma_x = \hat{Y}_t(x)$ und $\hat{P}_x = \gamma_x(P)$. Für jedes $x \in \hat{U}$ ist also auch $(\hat{W}, \hat{\underline{M}}, \hat{P}_x, (\hat{\underline{M}}_t), (\hat{X}_t))$ ein Markoffscher Prozeß mit Übergangsfunktion $\hat{F}$. Da $\hat{F}(h, y, f) = \hat{E}_y(f \circ \hat{X}_h)$, hat man

(+) Beachte, daß $\hat{X}_t \circ \gamma_x = \hat{Y}_t(x)$ und $\hat{Y}_t(x)$ $\underline{M}$ -meßbar ist.

(++) Vgl. Terminologie, Absatz 6, S. 7.

damit schließlich die Markoffeigenschaft von $\hat{X}$:

$$\hat{E}_x(f \circ \hat{X}_{t+h} | \hat{M}_t) = \hat{E}_{\hat{X}_t}(f \circ \hat{X}_h) \quad \hat{P}_x - f.ü..$$

Nun zum letzten Teil der Behauptung. Aus der Äquivalenz der Prozesse $((\hat{X}_t), \hat{P}_x)$ und $((\hat{Y}_t(x)), P)$ folgt die Äquivalenz der Prozesse $((p' \circ \hat{X}_t), \hat{P}_x)$ und $((p' \circ \hat{Y}_t(x)), P)$. Der Prozeß $((p' \circ \hat{Y}_t(x)), P)$ ist aber äquivalent zum Prozeß $((Y_t^U(p(x))), P)$ denn der Pfad $t \rightarrow \hat{Y}_t(x)$ entstand ja gerade durch Hochheben des Pfades $t \rightarrow Y_t^U(p(x))$. Wegen der Äquivalenz der Prozesse $((Y_t^U(p(x))), P)$ und $((X_t^U), P_{p(x)})$ folgt die Behauptung.

KOROLLAR. — Sei $\hat{X}$ nicht-abbrechend. Dann ist $\hat{X}$ ein Feller prozeß im Sinne von Dynkin, d.h. für $t \in \mathbb{R}_+$ und beschränktes stetiges $f: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $x \rightarrow \hat{E}_x(f \circ \hat{X}_t)$ auf $\hat{U}$ stetig.

BEWEIS: Sei $z \in \hat{U}$ und (z_n) eine Folge in $\hat{U}$ mit $z_n \rightarrow z$. Nach Lemma 4, (4) folgt $\hat{Y}_t(z_n) \rightarrow \hat{Y}_t(z)$ P-f.ü.. Da $\hat{X}$ nicht abbricht und f stetig ist, gilt auch $f \circ \hat{Y}_t(z_n) \rightarrow f \circ \hat{Y}_t(z)$ P-f.ü.. Nach dem Satz von Lebesgue folgt $E(f \circ \hat{Y}_t(z_n)) \rightarrow E(f \circ \hat{Y}_t(z))$. Wegen $\hat{E}_y(f \circ \hat{X}_t) = E(f \circ \hat{Y}_t(y))$ für alle $y \in \hat{U}$ folgt $\hat{E}_{z_n}(f \circ \hat{X}_t) \rightarrow \hat{E}_z(f \circ \hat{X}_t)$, was zu beweisen war.

Wir kehren nun zurück zu unserem Prozeß $X =$

$(W, \underline{M}, (\underline{M}_u), (X_u), (\theta_u), (P_x))$ auf der lokalkompakten abelschen Gruppe G . Ziel der folgenden Betrachtungen ist der Nachweis der obigen Bedingung (F) für bestimmte Mengen $U \subset G$. Hierzu ist es für unser Vorgehen zweckmäßig, neue Bezeichnungen einzuführen. Für eine Zufallsvariable $\xi: W \rightarrow U$ bezeichne $(Z_u^s(\xi))_{u \geq s}$ die Zufallsfunktion $(\xi + X_u - X_s)_{u \geq s}$ und $(\bar{Z}_u^s(\xi))_{u \geq s}$ die durch Abbrechen von $(Z_u^s(\xi))_{u \geq s}$ beim Austritt aus U entstehende Zufallsfunktion. Die Bedingung (F) lautet dann:

$$(F) \quad d'(\eta_n, \eta) \rightarrow 0 \text{ P-f.ü.} \implies \sup_{s \leq u \leq t} d'(\bar{Z}_u^s(\eta_n), \bar{Z}_u^s(\eta)) \rightarrow 0 \text{ P-f.ü.}$$

Wir werden uns von nun an nur noch auf diese Formulierung der Bedingung (F) beziehen.

Im folgenden bezeichne für eine Zufallsfunktion $Z = (Z_u)_{u \geq s}$

$$T(Z, A) = \inf \{u \geq s: Z_u \in \complement A\}$$

die Austrittszeit von Z aus A .

LEMMA 6. — Sei E ein topologischer Raum und $Z^1 = (W_1, \underline{M}_1, P_1, (Z_u^1)_{u \geq s})$ und $Z^2 = (W_2, \underline{M}_2, P_2, (Z_u^2)_{u \geq s})$ zwei stochastische Prozesse mit Zustandsraum E und stetigen Pfaden. Sind die Prozesse Z^1 und Z^2 äquivalent, so gilt:

$$T(Z^1, A) = +\infty \quad P_1\text{-f.s.} \iff T(Z^2, A) = +\infty \quad P_2\text{-f.s.}$$

$$T(Z^1, A) < +\infty \quad P_1\text{-f.s.} \iff T(Z^2, A) < +\infty \quad P_2\text{-f.s.}$$

$$T(Z^1, A') = T(Z^1, A'') \quad P_1\text{-f.s.} \iff T(Z^2, A') = T(Z^2, A'') \quad P_2\text{-f.s.}$$

BEWEIS: Bezeichnet $I = [s, +\infty[$ die Zeitmenge der stochastischen Prozesse Z^1, Z^2 , so können wir wegen der Stetigkeit der Pfade von Z^1, Z^2 definieren $\gamma_1: W_1 \rightarrow C(I, E)$ bzw. $\gamma_2: W_2 \rightarrow C(I, E)$ durch $\gamma_1(w_1) = (u \rightarrow Z_u^1(w_1))$ bzw.

$\gamma_2(w_2) = (u \longrightarrow Z_u^2(w_2))$. Bezeichnet $(W, \underline{M}, (Z_u)_{u \geq s})$ die zu $W = C(I, E)$ gehörende kanonische Zufallsfunktion (+), so gilt für $K \in E$ und $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$

$$(1) \quad \begin{aligned} T(Z^1, K)(w_1) &= T(Z, K)(\gamma_1(w_1)) \\ T(Z^2, K)(w_2) &= T(Z, K)(\gamma_2(w_2)) \end{aligned}$$

Da die stochastischen Prozesse Z^1 und Z^2 äquivalent sind, gibt es auf der (von den Abbildungen $Z_u (u \in I)$ erzeugten) σ -Algebra $\underline{M}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit

$$(2) \quad \gamma_1(P_1) = P = \gamma_2(P_2).$$

Mit Hilfe von (1) und (2) kann nun die Behauptung in einfacher Weise bewiesen werden. Wir begnügen uns mit dem Nachweis der letzten in Lemma 6 behaupteten Äquivalenz, da beim Beweis der beiden ersten Äquivalenzen keine neuen Argumente verwendet werden. Bezeichne $\bar{W} = \{T(Z, A') = T(Z, A'')\}$ und $\bar{W}_1 = \gamma_1^{-1}(\bar{W}), \bar{W}_2 = \gamma_2^{-1}(\bar{W})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= \{T(Z^1, A') = T(Z^1, A'')\} \\ \bar{W}_2 &= \{T(Z^2, A') = T(Z^2, A'')\} \end{aligned}$$

und

$$P_1(\bar{W}_1) = P(\bar{W}) = P_2(\bar{W}_2). \quad (++)$$

Hiermit kann der Beweis leicht zu Ende geführt werden.

LEMMA 7.— Sei $\xi: W \rightarrow G$ eine $\underline{N}_S$ -meßbare Abbildung. Ist μ die Verteilung von ξ bezüglich P , so sind die stochastischen Prozesse

$$(P, (\xi + X_u - X_s)_{u \geq s}) \text{ und } (P_\mu, (X_{u-s})_{u \geq s}) \quad (+++)$$

(+) Vgl. Fußnote auf Seite 33.

(++) Da wir nur Austrittszeiten aus offenen und abgeschlossenen Mengen betrachten, sind $\bar{W}, \bar{W}_1$ und $\bar{W}_2$ meßbar!

(+++) $P_\mu(A) = \int \mu(dx) P_x(A)$.

äquivalent.

BEWEIS: Mit Mitteln der Fourier Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen zeigt man zunächst, daß der translationsinvariante Prozeß X unabhängige Zuwächse besitzt. (Vgl. [10], Kapitel 1 und [1], 66.3, S. 316.) Hieraus folgt für $u \geq s$

$$\underline{M}_s \text{ und } X_u - X_s \text{ sind unabhängig bzgl. } P_\mu.$$

Außerdem sieht man leicht ein, daß für $u > s$ und $h \geq 0$:

$$(X_u - X_s) P_\mu = (X_{u+h} - X_{s+h}) P.$$

(Vgl. [1], 66.2, S. 315.) Hieraus folgt für $A, A_1, \dots, A_n \in \underline{\mathcal{G}}$ und $s < u_1 < \dots < u_n$

$$\begin{aligned} & P_\mu \left\{ X_0 \in A, X_{u_1-s} - X_0 \in A_1, \dots, X_{u_n-s} - X_{u_{n-1}-s} \in A_n \right\} \\ &= P_\mu \left\{ X_0 \in A \right\} P_\mu \left\{ X_{u_1-s} - X_0 \in A_1 \right\} \dots P_\mu \left\{ X_{u_n-s} - X_{u_{n-1}-s} \in A_n \right\} \\ &= P \left\{ \xi \in A \right\} P \left\{ X_{u_1} - X_s \in A_1 \right\} \dots P \left\{ X_{u_n} - X_{u_{n-1}} \in A_n \right\} \\ &= P \left\{ \xi \in A, X_{u_1} - X_s \in A_1, \dots, X_{u_n} - X_{u_{n-1}} \in A_n \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung $Z_u = \xi + X_u - X_s$ und $Z'_u = X_{u-s}$, so bedeutet das

$$\begin{aligned} & (Z_s, Z_{u_1} - Z_s, Z_{u_2} - Z_{u_1}, \dots, Z_{u_n} - Z_{u_{n-1}}) P \\ &= (Z'_s, Z'_{u_1} - Z'_s, Z'_{u_2} - Z'_{u_1}, \dots, Z'_{u_n} - Z'_{u_{n-1}}) P_\mu. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Anwendung der Abbildung

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_0, x_0 + x_1, \dots, x_0 + x_1 + \dots + x_n)$$

auf beide Seiten

$$(Z_s, Z_{u_1}, \dots, Z_{u_n}) P = (Z'_s, Z'_{u_1}, \dots, Z'_{u_n}) P_\mu,$$

was zu beweisen war.

SATZ 2. — Die Bedingung (F) ist erfüllt, wenn der Prozeß X die Menge U nicht verläßt, d.h. wenn für alle $x \in U$ gilt

$$P_x \{T((X_u), U) = +\infty\} = 1.$$

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß für jede $\mathbb{N}_S$ -meßbare Abbildung $\xi: W \rightarrow G$ mit $\xi(W) \subset U$

$$(1) \quad P \{T((Z_u^S(\xi)), U) = +\infty\} = 1$$

ist. Sei $x \in U$. Zunächst erhält man durch Anwendung von Lemma 6 auf die nach Lemma 7 äquivalenten stochastischen Prozesse

$$(P_x, (X_u)) \text{ und } (P, (Z_u^O(x))),$$

daß

$$P \{T((Z_u^O(x)), U) = +\infty\} = 1.$$

Nun gilt $T((Z_u^S(x)), U)(w) = s + T((Z_u^O(x)), U)(\theta_s(w))$ für alle $w \in W$ (vgl. Abschnitt 2, Lemma 3, (4), Beweis S. 26), so daß man für

$$(2) \quad P \{T((Z_u^S(x)), U) = +\infty\} = 1$$

nur zu zeigen braucht, daß für das Ereignis $A(x) = \{T((Z_u^O(x)), U) = +\infty\}$ gilt

$$P \{\theta_s \in A(x)\} = 1.$$

Dies ist richtig, denn wegen $A(x) \in \mathbb{N}$ gilt: $P \{\theta_s \in A(x)\} = E(1_{A(x)} \circ \theta_s) = E(E_{X_s}(1_{A(x)})) = E(E(1_{A(x)})) = E(P\{A(x)\}) = 1.$

Eine nochmalige Anwendung von Lemma 6 auf die nach Lemma 7 äquivalenten stochastischen Prozesse

$$(P, (Z_u^S(x))) \text{ und } (P_x, (X_{u-s}))$$

ergibt mittels (2):

$$P_x \{T((X_{u-s}), U) = +\infty\} = 1.$$

Wegen $\xi(W) \subset U$ folgt hieraus für $\mu = \xi(P)$:

$$(3) \quad P_\mu \{T((X_{u-s}), U) = +\infty\} = 1.$$

Eine letzte Anwendung von Lemma 6 auf die nach Lemma 7 äquivalenten stochastischen Prozesse

$$(P_\mu, (X_{u-s})) \text{ und } (P, (Z_u^s(\xi)))$$

liefert die Eigenschaft (1) mittels (3).

Mit diesem Ergebnis läßt sich nun die Gültigkeit der Bedingung (F) leicht nachprüfen. Sei $\eta \in U^W$ und eine Folge (η_n) in U^W mit $d'(\eta_n, \eta) \rightarrow 0$ P-f.ü. vorgegeben. Aus Lemma 2, (5) folgt

$$\sup_{s \leq u \leq t} \rho(\bar{Z}_u^s(\eta_n), \bar{Z}_u^s(\eta)) \rightarrow 0 \quad \text{P-f.ü.,}$$

denn außerhalb einer Nullmenge (bzgl. P) gilt $\zeta(s, t) = +\infty$ und somit

$$\bar{Z}_u^s(\xi) = Y_u^U(s, \xi) = Y_u(s, \xi) \quad \text{für alle } s \leq u \leq t$$

für jede $\mathbb{N}_S$ -meßbare Zufallsvariable $\xi: W \rightarrow U$. Somit gilt auch

$$\sup_{s \leq u \leq t} d'(\bar{Z}_u^s(\eta_n), \bar{Z}_u^s(\eta)) \rightarrow 0 \quad \text{P-f.ü.. } (+)$$

SATZ 3. — Die Bedingung (F) ist erfüllt, wenn der Prozeß X die Menge U verläßt und zwar nach derselben Zeit wie die Menge $\bar{U}$ (= abgeschlossene Hülle von U), d.h. wenn für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} P_x \{T((X_u), U) < +\infty\} &= 1 \\ P_x \{T((X_u), U) = T((X_u), \bar{U})\} &= 1. \end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes verwenden wird das folgende Lemma.

(+) Für einen lokalkompakten, nicht kompakten Raum E ist die Restriktion auf E der uniformen Struktur der Alexandroffkompaktifizierung gröber als jede mit der Topologie von E verträgliche uniforme Struktur (vgl. [4], § 1, exercice 15). Auf unsere Situation angewandt bedeutet das, daß zwei Punkte aus U bzgl. d' beliebig nahe beieinander liegen, wenn sie nur bzgl. ρ hinreichend nahe beieinander liegen.

(Vgl. auch [6], Vol. 1, Abschnitt 4.6, S. 111.)

LEMMA.— Sei E ein topologischer Raum und $Z=(W, \underline{M}, (Z_u)_{u \geq s})$ eine Zufallsfunktion mit Zustandsraum E und stetigen Pfaden. Sei V eine offene Teilmenge von E und (V_n) eine Folge von offenen Teilmengen von E mit $V_n \uparrow V$. Für alle $w \in \{T(Z, V) < +\infty\}$ gilt dann $T(Z, V_n)(w) \uparrow T(Z, V)(w)$.

BEWEIS: Sei $w \in \{T(Z, V) < +\infty\}$ vorgegeben. Wir setzen zur Abkürzung $a := T(Z, V)(w)$ und $a_n := T(Z, V_n)(w)$ ($n \in \mathbb{N}$). Wegen $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a$ gibt es eine Zahl $b \in [s, +\infty[$ mit $a_n \uparrow b$. Zu zeigen ist $b = a$. Da die Pfade von Z insbesondere linksseitig stetig sind, folgt

$$(1) \quad Z_{a_n}(w) \rightarrow Z_b(w).$$

Da die Menge $\mathbb{C}V_n$ für jedes n abgeschlossen ist, folgt andererseits aus der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade von Z :

$$(2) \quad Z_{a_n}(w) \in \mathbb{C}V_n \text{ für alle } n.$$

Aus (1) und (2) kann man folgern: $Z_b(w) \in \mathbb{C}V_n$ für alle n . Also $Z_b(w) \in \bigcap \mathbb{C}V_n = \mathbb{C}V$. Hieraus folgt $a \leq b$. Wegen $b \leq a$ folgt $b = a$, was zu zeigen war.

BEWEIS VON SATZ 3: Wir bemerken zunächst, daß für jede N_s -meßbare Zufallsvariable $\xi: W \rightarrow G$ mit $\xi(W) \subset U$ gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} P\{T((Z_u^S(\xi)), U) < +\infty\} &= 1 \\ P\{T((Z_u^S(\xi)), U) = T((Z_u^S(\xi)), \bar{U})\} &= 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften, die sich unter Berücksichtigung der Lemmata 6 und 7 genauso beweisen lassen wie die Eigenschaft (1) im Beweis von Satz 2, wollen wir nun die Gültigkeit der Bedingung (F) nachprüfen.

(I) Sei $\eta \in U^W$ und eine Folge (η_n) in U^W mit $d'(\eta_n, \eta) \rightarrow 0$ P-f.ü. vorgegeben. Es gibt eine Nullmenge $\bar{W} \subset W$ (bzgl. P) derart, daß $d'(\eta_n(w), \eta(w)) \rightarrow 0$ für alle $w \in W \setminus \bar{W}$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ und $w \in W \setminus \bar{W}$

$$(2) \quad U_n(w) := -(\eta_n(w) - \eta(w)) + U.$$

Für jedes $w \in W \setminus \bar{W}$ gibt es zur Folge $(U_n(w))$ eine Folge $(U'_n(w))$ von offenen Mengen $U'_n(w)$ und eine Folge $(U''_n(w))$ von abgeschlossenen Mengen $U''_n(w)$ derart, daß

$$(3) \quad U'_n(w) \subset U_n(w) \subset U''_n(w) \text{ für alle } n$$

$$(4) \quad U'_n(w) \uparrow U$$

$$(5) \quad U''_n(w) \downarrow \bar{U}$$

für alle $w \in W \setminus \bar{W}$ gilt. (+) Bezeichne nun für $n \in \mathbb{N}$, $w', w \in W \setminus \bar{W}$ $T_n(w', w)$, $T'_n(w', w)$, $T''_n(w', w)$ die Austrittszeit von $(Z_u^S(\eta))$ aus der Menge $U_n(w)$, $U'_n(w)$, $U''_n(w)$ an der Stelle w' . Es gilt dann wegen (2) und (3) für beliebiges $w, w' \in W \setminus \bar{W}$

$$(6) \quad T((Z_u^S(\eta)), U)(w) = T_n(w, w)$$

$$(7) \quad T'_n(w', w) \leq T_n(w', w) \leq T''_n(w', w).$$

Sei nun $w_0 \in W \setminus \bar{W} \cap \{T((Z_u^S(\eta)), U) < +\infty\} \cap \{T((Z_u^S(\eta)), U) = T((Z_u^S(\eta)), \bar{U})\}$. Wegen (4) folgt aus obigem Lemma für alle $w \in W \setminus \bar{W} \cap \{T((Z_u^S(\eta)), U) < +\infty\}$

$$T((Z_u^S(\eta)), U'_n(w_0))(w) \uparrow T((Z_u^S(\eta)), U)(w).$$

(+) Da $(a_k(w)) = (\eta_k(w) - \eta(w))$ eine Nullfolge (in G) ist, gibt es eine Folge $(k_n(w))$ in $\mathbb{N}$ mit $1 < k_1(w) < k_2(w) < \dots$ und $|a_{k_n}(w)| < 1/n$ für alle $k \geq k_n(w)$. Die Folgen $(U'_n(w))$, $(U''_n(w))$ können nun definiert werden durch

$$U'_k(w) = \{y : \rho(y, \mathbb{C}U) > 1/n\}$$

$$U''_k(w) = \{y : \rho(y, U) \leq 1/n\}$$

falls $k \in [k_n(w), k_{n+1}(w)[$.

Also

$$T'_n(w_0, w_0) \uparrow T((Z_u^S(\eta)), U)(w_0).$$

Wegen (5) folgt andererseits

$$T''_n(w_0, w_0) \downarrow T((Z_u^S(\eta)), \bar{U})(w_0).$$

Wegen $T((Z_u^S(\eta)), U)(w_0) = T((Z_u^S(\eta)), \bar{U})(w_0)$ und der Eigenschaft (7) folgt somit

$$T_n(w_0, w_0) \longrightarrow T((Z_u^S(\eta)), U)(w_0).$$

Also wegen (6)

$$T((Z_u^S(\eta_n)), U)(w_0) \longrightarrow T((Z_u^S(\eta)), U)(w_0).$$

Wegen (1) also

$$T((Z_u^S(\eta_n)), U) \longrightarrow T((Z_u^S(\eta)), U) \quad P\text{-f.ü..}$$

(II) Für jede Zufallsvariable $\xi: W \rightarrow U$ bezeichne $(\bar{Z}_u^S(\xi))$ die durch Stoppen von $((Z_u^S(\xi)))$ beim Austritt aus U entstehende Zufallsfunktion. Wir zeigen

$$(8) \quad \sup_{s \leq u \leq t} \rho(\bar{Z}_u^S(\eta_n), \bar{Z}_u^S(\eta)) \longrightarrow 0 \quad P\text{-f.ü..}$$

Dazu: Es gibt eine Nullmenge $\bar{W} \subset W$ (bzgl. P) derart, daß für beliebige $w \in W \setminus \bar{W}$

$$\eta_n(w) \longrightarrow \eta(w)$$

und

$$(9) \quad T_n(w) \longrightarrow T(w),$$

wobei $T_n = T((Z_u^S(\eta_n)), U)$ und $T = T((Z_u^S(\eta)), U)$ gesetzt wurde. Sei $w \in W \setminus \bar{W}$ beliebig. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß aus

$$a, b \in [s, t], \quad |a - b| < \delta$$

folgt

$$|X_a(w) - X_b(w)| < \epsilon/2.$$

(Die Abbildung $u \rightarrow X_u(w)$ ist gleichmäßig stetig auf

$[s, t]$.) Zu δ gibt es ein $n'_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n'_0$ und alle $u \in [s, t]$ gilt

$$|\min(u, T_n(w)) - \min(u, T(w))| < \delta.$$

(Dies kann man mittels einer einfachen Fallunterscheidung leicht aus (9) ableiten.) Es gilt also für alle $n \geq n'_0$ und alle $u \in [s, t]$

$$|X_{\min(u, T_n(w))}(w) - X_{\min(u, T(w))}(w)| < \epsilon/2.$$

Es gibt ferner ein $n''_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n''_0$

$$|\eta_n(w) - \eta(w)| < \epsilon/2.$$

Dann gilt für alle $n \geq \max(n'_0, n''_0)$ und für alle $u \in [s, t]$

$$|(\eta_n(w) + X_{\min(u, T_n(w))}(w) - X_S(w)) -$$

$$(\eta(w) + X_{\min(u, T(w))}(w) - X_S(w))|$$

$$\leq |\eta_n(w) - \eta(w)| + |X_{\min(u, T_n(w))}(w) - X_{\min(u, T(w))}(w)| < \epsilon,$$

d.h.

$$\rho((\overline{Z}_u^S(\eta_n))(w), (\overline{Z}_u^S(\eta))(w)) < \epsilon,$$

was zu beweisen war.

(III) Nun kann der Beweis wie folgt zu Ende geführt werden.

Wegen (8) gibt es eine Nullmenge $\overline{W} \subset W$ (bzgl. P) derart, daß für alle $w \in W \setminus \overline{W}$

$$\sup_{s \leq u \leq t} \rho(\overline{Z}_u^S(\eta_n)(w), \overline{Z}_u^S(\eta)(w)) \rightarrow 0.$$

Sei $w \in W \setminus \overline{W}$ beliebig. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta' > 0$ derart, daß

$$\{\rho < \delta'\} \cap (U \times U) \subset \{d' < \epsilon\}.$$

(Vgl. Fußnote auf Seite 40.) Ferner gibt es eine kompakte Teilmenge K von U derart, daß

$$U' \setminus K \subset \{x : d'(x, \Delta) < \epsilon\}.$$

Sei $\delta'' (> 0!)$ der Randabstand von K in U . Setze $\delta = \min(\delta',$

δ "). Zu δ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ und alle $u \in [s, t]$

$$\rho(\bar{Z}_u^s(\eta_n)(w), \bar{Z}_u^s(\eta)(w)) < \delta.$$

Hieraus kann man mittels einer einfachen Fallunterscheidung folgern: Für alle $n \geq n_0$ und für alle $u \in [s, t]$ gilt

$$d'(\bar{Z}_u^s(\eta_n)(w), \bar{Z}_u^s(\eta)(w)) < \epsilon,$$

was zu beweisen war.

Für den Fall, daß unser Prozeß X ein Brownscher Prozeß oder ein Wärmeleitungsprozeß ist, wollen wir nun zum Schluß noch zeigen, daß die Klasse M aller Mengen U , die der Bedingung (F) genügen, tatsächlich (in einem noch zu präzisierenden Sinne) groß ist, wie auf Seite 27 bemerkt wurde. Ein Brownscher Prozeß ist dabei bekanntlich ein Markoff prozeß auf einem euklidischen Raum $G = \mathbb{R}^N$, für dessen Übergangsfunktion F gilt: $F(t, x, dy) = (2\pi t)^{-N/2} \exp(-(x-y)^2/2t) dy$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N$. Man weiß, daß solch ein Prozeß existiert und daß man annehmen kann, daß er nicht abbricht und alle seine Pfade stetig sind. (Vgl. [2], Kap. 1, Übung 9.17, S. 51.) Man prüft leicht nach, daß jeder Brownsche Prozeß translationsinvariant ist. Unter einem Wärmeleitungsprozeß auf einem euklidischen Raum $G = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$ versteht man das Produkt aus einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $v = +1$ auf $\mathbb{R}^1$ (vgl. [2], Kap. 1, Übung 3.7, S. 23) und einem Brownschen Prozeß auf $\mathbb{R}^N$. (+) Ein Wärmeleitungsprozeß ist somit ebenfalls ein nicht-abbrechender, stetiger und trans

(+) Sei für $i=1,2$ $X^i = (w^i, w_{\Delta_i}^i, \underline{M}^i, (\underline{M}_t^i), (x_t^i), (\theta_t^i), (F_x^i))$ ein

lationsinvarianter Markoffprozeß.

LEMMA 8. — Sei $X' = (W', \underline{M}', (\underline{M}'_u), (X'_u), (\theta'_u), (P'_x))$ ein stetiger starker Markoffprozeß auf einem lokalkompakten Raum E mit abzählbarer Basis. Sei V eine offene Teilmenge von E derart, daß

$$(1) \quad P'_x \{T(X', \bar{V}) = 0\} = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}V. (+)$$

Dann gilt

$$P'_x \{T(X', V) = T(X', \bar{V})\} = 1 \quad \text{für alle } x \in V.$$

BEWEIS: Sei $x \in V$ vorgegeben. Wir setzen zur Abkürzung $T := T(X', V)$ und $\bar{T} := T(X', \bar{V})$. Es gilt

$$(2) \quad \{T < \bar{T}\} = \{T < \bar{T}\} \cap \{\bar{T} \circ \theta'_T > 0\}$$

Markoffprozeß auf $(E^1, \underline{E}^1)$. Setze $E = E^1 \times E^2$, $\underline{E} = \underline{E}^1 \otimes \underline{E}^2$, $W = W^1 \times W^2$, $\underline{M} = \underline{M}^1 \otimes \underline{M}^2$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ und $w_\Delta = (w_{\Delta_1}, w_{\Delta_2})$. Definiere für $x \in E' = E \cup \{\Delta\}$ $P_x = P_{x_1}^1 \otimes P_{x_2}^2$, falls $x = (x_1, x_2) \in E$ und $= P_{\Delta_1}^1 \otimes P_{\Delta_2}^2$, falls $x = \Delta$ und für $t \in \mathbb{R}_+$ $\underline{M}_t = \underline{M}_t^1 \otimes \underline{M}_t^2$, $X_t(w_1, w_2) = (X_t^1(w_1), X_t^2(w_2))$, falls $(X_t^1(w_1) \neq \Delta_1 \text{ und } X_t^2(w_2) \neq \Delta_2)$ und $= \Delta$, falls $(X_t^1(w_1) = \Delta_1 \text{ oder } X_t^2(w_2) = \Delta_2)$ und $\theta_t(w_1, w_2) = (\theta_t^1(w_1), \theta_t^2(w_2))$. Man prüft leicht nach, daß dann der Term $X = (W, w_\Delta, \underline{M}, (\underline{M}_t), (X_t), (\theta_t), (P_x))$ einen Markoffprozeß auf $(E, \underline{E})$ definiert. X heißt das Produkt von X^1 und X^2 .

(+) D.h. jeder Punkt $x \in \mathbb{C}V$ ist regulär bezüglich $\mathbb{C}\bar{V}$ (vgl. [2], Kapitel 1, Definition 11.1, S. 61), was wiederum bedeutet, daß die fein-abgeschlossene Hülle (d.h. die abgeschlossene Hülle bezüglich der feinen Topologie von X') von $\mathbb{C}\bar{V}$ mit $\mathbb{C}V$ übereinstimmt (vgl. [2], Kapitel 2, Definition 4.1, S. 85 und Übung 4.9, S. 87).

(beachte, daß für jedes $u \in \mathbb{R}_+$ $\{u < \bar{T}\} \subset \{u + \bar{T} \circ \Theta'_u = \bar{T}\}$) und, da T und $\bar{T}$ ($\underline{M}'_u$)-Stopzeiten sind (+)

$$(3) \quad \{T < \bar{T}\} \in \underline{M}'_T$$

(vgl. [2], Kapitel 1, Proposition 6.8, S. 33). Nun besitzt X' die starke Markoffeigenschaft, so daß für jedes $A \in \underline{M}'_T$ und jedes $B \in \underline{M}'$

$$E'_X(1_A \cdot 1_B \circ \Theta'_T) = E'_X(1_A \cdot P'_{X_T}(B)).$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt hieraus für $A = \{T < \bar{T}\}$ und $B = \{\bar{T} > 0\}$

$$(4) \quad P'_X\{T < \bar{T}\} = E'_X(1_{\{T < \bar{T}\}} \cdot P'_{X_T}\{\bar{T} > 0\}).$$

Auf $\{T < \bar{T}\} \subset \{T < +\infty\}$ gilt $X_T \in \mathbb{C}V$, da $\mathbb{C}V$ abgeschlossen ist und die Pfade von X' insbesondere rechtseitig stetig sind. Wegen (1) gilt somit auf $\{T < \bar{T}\}$ $P'_{X_T}\{\bar{T} > 0\} = 0$. Damit folgt aus (4) $P'_X\{T < \bar{T}\} = 0$. Wegen $T \leq \bar{T}$ folgt $P'_X\{T = \bar{T}\} = 1$, was zu beweisen war.

LEMMA 9. — Sei $X' = (W', \underline{M}', (\underline{M}'_u), (X'_u), (\Theta'_u), (P'_X))$ ein Brownscher Prozeß auf einem euklidischen Raum $E = \mathbb{R}^N$, $K \neq E$ ein offener Kegel (++) in E und $a \in E$. Dann gilt

$$P'_a\{T(X', \mathbb{C}(a+K)) = 0\} = 1.$$

BEWEIS: Wir setzen zur Abkürzung $T := T(X', \mathbb{C}(a+K))$. Wenn F die Übergangsfunktion von X' bezeichnet, so gilt für alle $t > 0$

(+) Dies läßt sich durch geeignete Wahl der σ -Algebren $\underline{M}'$ und $\underline{M}'_u$ ($u \in \mathbb{R}_+$) immer erreichen. (Vgl. [2], Kapitel 1, S. 27 und Theorem 10.7, S. 54.)

(++) Ein Kegel K ist eine nicht leere Teilmenge von E derart, daß $c \cdot K = K$ für alle $c > 0$.

$$\begin{aligned}
 P'_a \{T > t\} &\leq P'_a \{X'_t \in \mathbb{C}(a+K)\} \\
 &= F(t, a, \mathbb{C}(a+K)) \\
 (1) \quad &= 1 - F(t, a, a+K) \\
 &= 1 - F(t, 0, K) \\
 &= 1 - F(1, 0, K) < 1.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, daß X' translationsinvariant ist, daß $F(c^2 t, c.x, c.A) = F(t, x, A)$ und $c.K = K$ für alle $c > 0$ und daß schließlich $F(1, 0, K) > 0$ ist, da $K \neq \emptyset$ offen. Nun gilt

$$P'_a \{T > 1/n\} \uparrow P'_a \{T > 0\}.$$

Damit folgt aus (1)

$$(2) \quad P'_a \{T > 0\} < 1.$$

Nach dem Null-Eins-Gesetz von Blumenthal (vgl. [2], Kap. 1, Proposition 5.17, S. 30) folgt aus (2) $P'_a \{T > 0\} = 0$, was zu beweisen war.

Nach diesen beiden vorbereitenden Lemmata können wir nun die oben angekündigte Abschätzung der Größe der Klasse $\mathcal{H}$ angeben.

SATZ 4. — Ist der Prozeß X ein Brownscher Prozeß oder ein Wärmeleitungsprozeß auf einem euklidischen Raum G , so bildet das System $\mathcal{H}$ aller Mengen U , die der Bedingung (F) genügen, eine Basis von G .

BEWEIS: (I) Sei X zunächst ein Brownscher Prozeß auf einem euklidischen Raum $G = \mathbb{R}^N$. Es genügt zu zeigen, daß jede offene Kugel $U \subset \mathbb{R}^N$ zu $\mathcal{H}$ gehört, denn das System aller Kugeln bildet eine Basis von $\mathbb{R}^N$. Sei also eine beliebige Kugel U vorgegeben. Die erste der beiden Bedingungen des

Satzes 3 ist für U erfüllt, denn der Brownsche Prozeß verläßt jede beschränkte Menge nach endlicher Zeit. Weisen wir nun die zweite Bedingung des Satzes 3 für U nach, indem wir Lemma 8 heranziehen. Dazu sei $a \in \text{Rd } U$ (+) beliebig. Es gibt eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^N$ mit $H \supset \{a\}$ derart, daß der eine der beiden durch H bestimmten offenen Halbräume, nennen wir ihn K , ganz in $\bar{U}$ liegt. (++) Da $T(X, \bar{U}) \leq T(X, \bar{K})$, folgt aus Lemma 9 (man beachte, daß $K-a$ ein Kegel ist):

$$P_a \{T(X, \bar{U}) = 0\} = 1.$$

Wegen Lemma 8 (man beachte, daß der Brownsche Prozeß die starke Markoffeigenschaft besitzt) folgt, da $a \in \text{Rd } U$ beliebig war, daß auch die zweite Bedingung des Satzes 3 für U erfüllt ist. Also gehört die Kugel U zu $\mathcal{H}$.

(II) Sei nun X ein Wärmeleitungsprozeß auf einem euklidischen Raum $G = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$. Es genügt zu zeigen, daß jede Menge U der Gestalt $U = I \times V$, wo I ein endliches offenes Intervall in $\mathbb{R}^1$ und V eine offene Kugel im $\mathbb{R}^N$ ist, zu $\mathcal{H}$ gehört, denn das System dieser Mengen bildet eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$. Nun ist $X = (W, \dots, (P_x))$ per definitionem das Produkt aus einer Bewegung $X^1 = (W^1, \dots, (P_x^1))$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v = +1$ auf $\mathbb{R}^1$ und einem Brownschen Prozeß $X^2 = (W^2, \dots, (P_x^2))$ auf $\mathbb{R}^N$, so daß für die Austrittszeit von X aus einer Menge der Gestalt $A^1 \times A^2$ gilt:

$$(1) \quad T(X, A^1 \times A^2)(w_1, w_2) = \min(T(X^1, A^1)(w_1), T(X^2, A^2)(w_2)).$$

(+) $\text{Rd } U$ bezeichne den (topologischen) Rand von U .

(++) Dies sieht man am einfachsten durch Anwendung eines Satzes aus der Konvexen Analysis ein: Die nach [5], Proposition 3 S. 84 existierende, durch $a \in \text{Rd } \bar{U}$ gehende Stützhyperebene der abgeschlossenen konvexen Menge $\bar{U}$ leistet das Verlangte!

Nun gilt für beliebige $x_1 \in I$

$$(2) \quad T(X^1, I) = T(X^1, \bar{I}) \quad P_{x_1}^1 \text{-f.s.},$$

wie unmittelbar einzusehen ist, und für beliebige $x_2 \in V$

$$(3) \quad T(X^2, V) = T(X^2, \bar{V}) \quad P_{x_2}^2 \text{-f.s.},$$

wie eben unter (I) gezeigt wurde. Da $\bar{I} \times \bar{V} = \bar{I} \times \bar{V}$ und $P_{(x_1, x_2)} =$

$P_{x_1}^1 \otimes P_{x_2}^2$, folgt somit aus (1), (2) und (3):

$$T(X, I \times V) = T(X, \overline{I \times V}) \quad P_x \text{-f.s.}$$

für alle $x \in I \times V$. Damit ist für $U = I \times V$ die zweite Bedingung des Satzes 3 nachgewiesen. Da die erste Bedingung dieses Satzes trivialerweise erfüllt ist, ist gezeigt, daß $U = I \times V$ zu M gehört.

L I T E R A T U R

- [1] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin (1968).
- [2] R.M. Blumenthal and R.K. Gettoor, Markov processes and potential theory. New York - London (1968).
- [3] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre 3: Topologie générale. Chapitres 1,2. Paris (1965).
- [4] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre 3: Topologie générale. Chapitre 9. Paris (1958).
- [5] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre 5: Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1,2. Paris (1966).
- [6] E.B. Dynkin, Markov processes. Berlin - Göttingen - Heidelberg (1965). 2 Bände.

- [7] P.J.Hilton and S.Wylie, Homology Theory. Cambridge (1962).
- [8] S.Itô, Brownian motions in a topological group and in its covering group. Rend. Circ. Mat. Palermo 1, (1952) 40 - 48
- [9] K.R.Parthasarathy, Probability measures on metric spaces. New York-London (1967).
- [10] W.Rudin, Fourier analysis on groups. New York-London (1962).

L E B E N S L A U F

Ich wurde am 21.8.1944 als Sohn des Hauptkassenverwalters Georg Held und seiner Ehefrau Josefine Held in Burgellern, Kreis Bamberg, geboren. Ab 1950 besuchte ich die Volksschule in Nürnberg bis zur 6. Klasse. 1956 trat ich in die Höhere Schule über und legte im Juni 1964 an der Hans-Sachs-Oberrealschule in Nürnberg die Reifeprüfung ab. Im November 1964 begann ich an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg mit dem Studium der Mathematik. Dieses schloß ich im Oktober 1970 durch Ablegen der Diplomhauptprüfung ab. Von Januar 1971 bis April 1973 war ich am Mathematischen Institut als wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt.

Erlangen, September 1973

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990